Revue d'histoire des mathématiques,
5 (1999), p. 181–247.

BOREL ET LA MARTINGALE DE SAINT-PÉTERSBOURG

Bernard Bru, Marie-France Bru, Kai Lai Chung (*)

Résumé. — On se propose d'examiner sur un exemple, le paradoxe de Saint-Pétersbourg, la façon dont Borel « expose » la science de son temps. La première partie indique sommairement la place singulière de la vulgarisation dans l'œuvre de Borel. Les deux parties suivantes présentent dans l'ordre chronologique les contributions boréliennes au paradoxe de Saint-Pétersbourg qui s'échelonnent sur plus de cinquante ans ; elles indiquent comment Borel aborde le problème en le replaçant dans une réflexion au long cours, scientifiquement très riche, sur le « paradoxe des martingales », ces « systèmes de jeu » qui prétendent faire la fortune d'un joueur au jeu de pile ou face. Borel donne de ce problème une solution originale qui anticipe une égalité fondamentale de la théorie mathématique naissante des martingales. On signale en particulier le rôle paradoxal joué par Félix Le Dantec dans le développement de la pensée borélienne sur ces thèmes. Une annexe rétablit en langue moderne les « martingales de Borel ».

Abstract. — Borel and the St. Petersburg martingale. — This paper examines–by means of the example of the St. Petersburg paradox–the way in which Borel "reveals" the science of his day. The first part sketches the singular place of popularization in Borel's work. The two parts that follow give a chronological presentation of Borel's contributions to the St. Petersburg paradox, contributions that evolved over a period of more than fifty years. These show how Borel approaches the problem by replacing it with a lengthy–and scientifically rich–reflection on the "martingale paradox," these "systems of games" that purport to determine the outcome of coin-tossing. Borel gives an original solution to this problem that anticipates the fundamental equality of the naissant mathematical theory of martingales. The paradoxical role played by Félix Le Dantec in the development of Borel's thought on these themes is highlighted. An appendix recasts Borel's concept of martingales in modern terms.

1. VULGARISATION BORÉLIENNE.

Émile Borel (1871–1956) est connu pour sa « mesure » et ses « ensembles

(*) Texte reçu le 3 septembre 1999, révisé le 3 avril 2000.
Bernard Bru, Université René-Descartes, Laboratoire de statistique médicale, 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris Cedex 06 (France).
Marie-France Bru, Université Denis-Diderot, UFR de mathématiques, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France).
Kai Lai Chung, Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305 (USA).

© société mathématique de france, 1999

mesurables » (1894–1898), pour la propriété dite de Borel-Lebesgue (1894), peut-être aussi pour « l'ordre », la « croissance régulière » et les zéros des fonctions entières (1896–1900), les séries divergentes (1896–1901), ses contributions à la théorie de l'approximation (1905) ou sa théorie des fonctions monogènes (1894–1912) et, bien sûr, pour les « probabilités dénombrables » (1909), mais on considère parfois qu'il a abandonné la recherche mathématique à partir de 1914 pour se consacrer entièrement à sa carrière politique et administrative (il fut secrétaire général du Gouvernement, ministre, député, membre des plus importantes commissions de l'Assemblée nationale, directeur de l'Institut Henri Poincaré, etc.) et à la rédaction ou la direction d'ouvrages de vulgarisation et d'enseignement, notamment d'un grand *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* en 18 fascicules (1924–1939). Borel a continué en fait de publier des travaux mathématiques tout au long de sa carrière universitaire à la Sorbonne où il est professeur de 1904 à 1940, et après son départ à la retraite. En particulier, après la seconde guerre mondiale, débarrassé de la plupart de ses mandats politiques nationaux et locaux et de ses responsabilités universitaires, Borel a publié de 1946 à 1953 près de quarante articles ou livres dont certains sont d'une étonnante originalité.

Questions de style

Il est vrai que Borel, par un singulier travers, s'ingénie à dissimuler ses idées les plus intéressantes dans des publications où l'on ne s'attend guère à les rencontrer et sous une forme si particulière qu'on hésite à les reconnaître et qu'on se demande même s'il en saisit toute la richesse potentielle. Citons par exemple sa remarquable classification des ensembles de mesure nulle, commencée en 1911, reprise et développée seulement dans un traité élémentaire de *Théorie des ensembles* de la collection « L'éducation par la science » qu'il dirige chez Albin Michel [1949a], ou encore sa solution mathématique du problème de Saint-Pétersbourg soigneusement cachée, comme nous allons le voir, dans un volume de la collection « Que sais-je ? » [Borel 1950], intitulé *Probabilité et certitude*. Bien que cela sorte de notre sujet, nous pourrions assurément faire les mêmes observations pour la plupart des contributions boréliennes importantes, sa théorie de la mesure par exemple, qu'il ne consentira jamais à préciser vraiment, ou sa théorie des probabilités dénombrables dont certains, ici ou là, continuent à nier qu'elle ait jamais été fondée en droit. Mais ce qui n'était au début

du siècle qu'habitude savante privilégiant dans la rédaction des grands textes mathématiques l'exposition des idées, la syntaxe et l'esthétique d'une langue bien faite, plutôt que la rigueur logique et mathématique qui allait de soi, sans qu'il fût nécessaire d'y insister, ou les raisonnements intermédiaires que le lecteur était censé « voir facilement », deviendra peu à peu un parti pris délibéré et systématique. Borel entend maintenir dans le flou les définitions en forme des objets qu'il manipule et donner aux énoncés qui en précisent la nature et, plus encore, à leurs démonstrations une grande latitude d'interprétation et de généralité, alors même que les mathématiques d'après-guerre s'épurent, s'axiomatisent et se corsètent de toute part pour mieux se protéger des dérives laxistes qui ignorent la complexité véritable des objets mathématiques et des pièges de la raison où elles perdent leur âme grecque.

Pourtant Borel a triomphé dans sa prime jeunesse des grandes et des petites olympiades mathématiques de son temps (voir [Lebesgue 1991], [Guiraldenq 1999]) ; par exemple, il s'est astreint à classifier pour les besoins d'un concours académique, le prix Vaillant de 1904, tous les déplacements à trajectoires sphériques, dont l'équation fondamentale comporte 17 termes, et l'on peut lui reconnaître pour le moins certaines capacités logiques et combinatoires. Pourquoi ne consent-il pas à les utiliser lorsqu'il a soudain une de ces idées capables de bouleverser le cours des choses, par exemple l'idée de la mesure de Borel, unique prolongement dénombrablement additif de la longueur des intervalles, apte à mesurer de proche en proche tous les ensembles boréliens dont la théorie borélienne des fonctions a besoin ? Pourquoi en indique-t-il sommairement l'idée sans attacher d'importance à la rigueur ou à la généralité, de sorte qu'on ne sait jamais de quoi il parle, ni à qui il s'adresse ? Pourquoi ses travaux si profonds de calcul des probabilités sont-ils présentés de telle manière qu'il soit possible de soutenir, comme le font certains et non des moindres, que jamais il n'énonça ni ne démontra de façon précise et incontestable le moindre résultat mathématique identifiable ? La réponse donnée en général est que les idées mathématiques de Borel sont trop en avance sur ses possibilités techniques et que, s'il se contente d'une exposition aussi peu satisfaisante pour un mathématicien d'aujourd'hui, c'est qu'il ne peut en fournir de meilleure. Borel encouragerait d'ailleurs ce type d'analyse, lui qui répondait lorsqu'il était interrogé à ce sujet, qu'en effet il y aurait

lieu d'entrer dans de plus grands détails mais que cela risquait d'être long, en tout cas trop fastidieux pour qu'il songeât à s'y attacher et qu'il avait mieux à faire. Il admettait d'ailleurs volontiers qu'il avait abandonné les « hautes mathématiques » après la guerre de 1914 (voire même dès 1905), ne se sentant plus la « force de tête » pour s'y adonner vraiment [Marbo 1968], « orgueilleuse modestie », que lui reprochait amicalement Lebesgue auquel il écrivait en 1909 qu'il éprouvait pour la carrière mathématique un « profond dégoût » [Lebesgue 1991]. Mais on n'atteint pas, ce faisant, le fond de la question. Borel, mathématicien brillant et visionnaire, s'est voulu très tôt un missionnaire ; la science qu'il a cultivée d'abord, comme Hermite et Poincaré, pour elle-même, pour sa beauté, sa rigueur morale, son austère grandeur, ne mérite qu'on s'y consacre qu'à condition d'être mise au service de l'homme et de la société.

Pour ce qui est de la société, le fait est assez connu, les mathématiques boréliennes ont ou doivent avoir une « valeur pratique », et Borel développera dès 1906 ce thème à la fois dans ses cours, dans son activité éditoriale comme directeur fondateur de la *Revue du mois*, et dans son engagement pour le développement des applications du calcul des probabilités : physique statistique, biologie, sciences de l'ingénieur, actuariat, etc. Nous n'y reviendrons pas ici. Pour ces mathématiques-là, seules comptent en définitive les « formules », qu'il convient d'établir le plus rapidement possible, sans trop se soucier des hautes mathématiques dont on utilise seulement les techniques de calcul. Mais comme il arrive parfois que l'établissement desdites formules nécessite la mise en œuvre de méthodes originales, les mathématiques tout au long de l'histoire ont bénéficié des apports inattendus de leurs « applications » (pensons à la mécanique newtonienne, à la théorie de la chaleur ou simplement au calcul des probabilités). Et Borel ne paraît pas avoir jamais remis en cause le « rôle bienfaisant » de cette mathématique « pratique », intimement liée à la Science la plus haute et la plus pure mais engagée dans l'action, au contraire il le magnifie constamment, à l'exemple de son ami Jean Perrin qu'il aime à citer : «*L'Aventure merveilleuse où l'Humanité se trouve engagée depuis une génération à peine, et qui sans doute marque l'aurore d'une Civilisation nouvelle, n'a pu se dérouler en son rythme qui va précipitant de plus en plus, que grâce à un progrès sans cesse accéléré de la Science*» [Borel 1932, p. 99].

Exposer, inventer

Pour l'homme, la chose est moins évidente ; il s'agit naturellement du bonheur individuel, sinon quel sens cela aurait-il ? Borel, pour l'avoir expérimenté sur lui-même, adhère à la théorie cartésienne et socratique du bonheur par la clarté des idées, cette harmonie sereine qui naît d'une explication lumineuse. La science seule, et la science au plus haut niveau possible à une époque donnée, peut contribuer véritablement à répondre aux exigences d'absolu et de vérité dont tout homme est naturellement doté, et c'est aux savants les plus avancés qu'incombe cette tâche d'exposition dont la noblesse n'échappera pas mais dont la difficulté paraît insurmontable. Comment expliquer à un public raisonnablement cultivé, ou simplement à un lecteur unique, l'idée de mesure par exemple, ou toute autre idée mathématique, de sorte qu'elle apparaisse avec autant d'évidence et de clarté qu'à celui qui le premier la conçut ? Assez vite, Borel s'est persuadé (à tort ou à raison, c'est un autre débat) que la rigueur logique nécessaire, axiomatique générale et techniques démonstratives adaptées, n'apportait rien à cet égard : le lecteur mathématicien pourrait « aisément » la reconstituer (s'il en est capable, sinon tant pis pour lui !) ; quant au lecteur ordinaire, elle lui serait tout à fait impénétrable et donc sans valeur d'aucune sorte. Mais est-il possible, sans technique mathématique que le strict minimum, d'élever le lecteur vers le bonheur du savant, lui présenter non seulement une version métaphorique ou sentimentale des grandes idées scientifiques, mais une approche aussi serrée que possible des concepts dans leur intégrité et leur intuition primitives ? Il faudrait pour cela accumuler de toutes les façons possibles des esquisses de démonstrations, des pistes de développements nouveaux, des calculs explicites lorsque c'est possible, ou même présenter des idées tout à fait nouvelles que cette curieuse méthode autorise et qu'on n'imaginerait pas sans elle, et surtout des explications claires et lucides, inventer au besoin de nouvelles explications pour montrer que la raison humaine a raison de tout pourvu qu'on la laisse libre et qu'on ne se berce pas de mots.

Borel commence par appliquer ce mode d'exposition à son œuvre mathématique, il explique par exemple aux lecteurs de la collection *l'Avenir de la science* dirigée par Jean Rostand, le lemme de recouvrement de Borel(-Lebesgue) dont la simplicité biblique cache la profondeur véritable, et comment concevoir que les points rationnels d'un double

décimètre puisse être de mesure nulle alors qu'ils sont infiniment resserrés : il suffit d'enlever progressivement par l'imagination autour de chacun d'eux une quantité de matière de plus en plus infime de même qu'un fabricant d'instruments de précision trace sur le bois de sa règle des traits de plus en plus fins au fur et à mesure qu'il en raffine les subdivisions de telle sorte que la règle puisse rester lisible. Et ce procédé de fabrication permet au mathématicien de s'évader des cercles qui jusqu'alors limitaient la théorie des fonctions analytiques, et bien d'autres choses encore [Borel 1946, p. 183–191]. Mais Borel ne saurait se limiter à l'œuvre de Borel ; dès 1906, il expose, à sa manière et de la façon même dont il les comprend, les grands thèmes scientifiques de son temps, théories moléculaires, relativité, calcul des probabilités, génétique, économie, psychologie, etc. Vue de la sorte, la « vulgarisation » n'a plus de frontière précise avec la création scientifique, elle devient pour Borel un genre authentiquement philosophique et savant, qui exige de sa part un effort d'imagination mathématique et une lucidité sans cesse renouvelés, la claire compréhension de sa propre pensée (il ne s'agit plus de convaincre ses pairs mais l'homme en général, soi en particulier), et, en retour, réclame de son lecteur une adhésion intelligente et une vigilance sans faille, tant les allusions sont discrètes et les éclairs rapides, qui peuvent, seuls, relier ce qu'on voit à ce qu'on ne voit pas encore et ce qu'on ne comprend pas à ce qu'on comprendra un jour !

Fort heureusement les deux missions temporelles du savant, « inventions » au service de l'Humanité et « exposition » de la Science, sont indissolublement liées l'une à l'autre. Le devoir de vulgarisation qui incombe au véritable savant n'est pas seulement destiné à l'épanouissement de l'individu, il a un rôle social éminent, celui d'élever le niveau culturel de « l'humanité moyenne » et, ce faisant, de renouveler les « élites », en attirant vers la Science une part de plus en plus grande des « intelligences » de la Nation, de sorte que le bonheur individuel par la contemplation claire et lucide de la Science contribue au bonheur de la société en mettant sans cesse à son service de nouvelles générations de savants. Comme l'écrit Borel : «*Pour que l'élite nécessaire au progrès scientifique puisse subsister, il faut qu'elle ne vive pas séparée de la masse des intelligences ; l'élévation générale du niveau de la culture doit lui permettre d'entrer en relation directe ou indirecte avec les classes moyennes et les travailleurs*

manuels. L'isolement serait fatal à l'aristocratie de l'esprit ; il faut cependant maintenir et fortifier cette aristocratie si l'on veut que la civilisation ne disparaisse pas. » [Borel 1931, p. 767]. «*Il ne serait pas trop ambitieux*», ajoute Borel, «*de penser qu'un Anatole France, ou un Pierre Loti, pourraient atteindre un million de lecteurs, tandis qu'un Renan, un Taine ou un Henri Poincaré en atteindraient plus de cent mille* [pour une France de vingt millions d'habitants] ». L'élévation générale du niveau de culture des classes moyennes « répercutée nécessairement » sur la « classe paysanne et ouvrière » permettrait aussi d'éviter «*le danger le plus grand qui pourrait menacer l'humanité. Ce danger serait que les procédés techniques de plus en plus perfectionnés qui résultent des progrès de la science soient mis entre les mains d'hommes incapables de les comprendre complètement et qui les emploieraient par simple routine. Ce fut peut-être là l'histoire de certains insectes, des abeilles ou des termites. Le jour où la culture scientifique de l'humanité moyenne serait notablement en retard sur le développement industriel, la véritable culture scientifique risquerait de disparaître complètement... La science cesserait de progresser et l'humanité se figerait dans un mécanisme sans avenir, bientôt suivi d'une décadence inévitable*» [Borel 1931, p. 768].

Élever le niveau de la véritable culture scientifique de l'humanité moyenne, voilà donc un des projets boréliens qu'il peut être intéressant de discuter rapidement ici. Pour cela nous examinons un seul exemple, et des plus modestes, le paradoxe de Saint-Pétersbourg. Ce problème a ceci de remarquable qu'il défie les calculs et les théories des mathématiciens comme le bon sens et l'habileté des joueurs et que, discuté de façon continue depuis le début du XVIII^{e} siècle, il n'a pas trouvé jusqu'alors de solution mathématique vraiment satisfaisante, ni d'ailleurs de solution pratique au-dessus de tout soupçon. On imagine assez que pour Borel qui entend établir définitivement et le plus largement possible la valeur pratique et philosophique du calcul des probabilités, il y a là une énigme que la raison doit éclairer. Nous verrons que Borel aborde ce type de paradoxes dès son premier cours de calcul des probabilités à la Sorbonne, au premier semestre 1908–1909, et qu'il conclura provisoirement sa réflexion seulement dans son dernier « Que sais-je ? » de probabilité publié en 1950, après avoir montré en 1939 que ce fameux « paradoxe de Saint-Pétersbourg » peut être vu comme un avatar mineur d'un paradoxe

plus fondamental encore, le paradoxe des martingales qui rendent un jeu équitable infiniment avantageux à l'un des joueurs, et que ce paradoxe-là est susceptible d'une explication mathématique, qu'il est d'ailleurs le premier à donner à cette occasion. De sorte que, dans ce cas précis, Borel atteint à l'idéal de la vulgarisation, qui consiste à donner au lecteur des classes moyennes comme au travailleur manuel, et en langue vulgaire, la primeur d'une théorie mathématique de première importance avant même que l'aristocratie des savants ne s'en soit emparée. Et cette histoire de la martingale de Saint-Pétersbourg que nous racontons rapidement ici permettrait sans doute de pénétrer un instant dans l'univers borélien et, ce faisant, d'éclairer quelque peu l'ensemble d'une œuvre exceptionnelle à bien des égards.

Elle pourrait également illustrer une thèse fort modeste, selon laquelle la vulgarisation peut être occasion de création mathématique, et que Borel, plus qu'un autre, l'a assez bien compris et pratiqué. À l'inverse d'un Laplace, pour qui l'exposition des grandes théories scientifiques se réduit souvent à la transcription en langue vulgaire de ses résultats mathématiques les plus impénétrables, laissant au lecteur abasourdi le soin de « comprendre » ce dont il s'agit, que lui-même n'a eu ni le temps ni le goût d'indiquer (on relira l'*Essai philosophique sur les probabilités* pour s'en assurer), Borel voit dans la vulgarisation l'occasion d'aller plus loin encore dans son effort de sincérité intellectuelle et sa volonté de comprendre et de faire comprendre au-delà des doutes et des dissolutions d'évidences, laissant le soin à d'autres de transcrire en langage mathématique ses avancées vulgarisatrices les plus audacieuses qui parfois dépassent, sans crier gare, le front scientifique de son temps. Il n'est dès lors pas très étonnant que cette vulgarisation extrême borélienne n'ait pas eu le succès escompté. Cournot, dont l'*Exposition de la théorie des chances* à l'usage d'un large public moyennement cultivé demeure pour l'éternité un sommet de ce genre littéraire, dut subir un siècle auparavant les mêmes déconvenues, les mathématiciens n'y trouvant pas de théorèmes et les autres y perdant leur latin.

Des lectures parallèles

Il est une autre thèse, assez connue celle-là également, que nous aimerions argumenter incidemment au long de notre histoire, celle selon laquelle les savants du siècle nouveau, et Borel en particulier mais aussi Bachelier,

d'autres encore, abordent les problèmes classiques du calcul des probabilités avec un regard neuf, formé aux « enregistrements graphiques », aux « courbes sinueuses », aux « chemins conséquents » des sciences de leur temps, physiologie, physique, économie, etc., qui les amènent à voir et à poser d'autres questions, dont le théorème de Borel sur les nombres normaux ou le jeu de pile ou face est le plus célèbre, mais qui touchent aussi bien à ces multiples « attentes », « atteintes », « passages », « oscillations », « extrêmes », « écarts », « arrêts », « retours »,..., qui rythment le cours hasardeux des bonnes et des mauvaises fortunes d'un joueur. La théorie des processus de Markov, celle même des martingales, ne peuvent se concevoir que dans cette perspective. De sorte que les martingales de Borel, si élémentaires et si apparemment anecdotiques soient-elles, prennent naturellement place dans ce lent mouvement qui modifie le cours d'une discipline, le calcul des probabilités, appelée à occuper dans la science du XX^{e} siècle l'une des positions dominantes.

Que ces deux thèses se rencontrent ici n'est pas seulement le fruit d'un hasard aveugle. Toute exposition lucide d'une théorie scientifique nécessite un regard original et tout changement de point de vue provoque la découverte, dans le même temps qu'il stimule l'exposition. L'intuition savante, chez Borel, s'incarne en plusieurs façons qui se mêlent et se confondent, publications spécialisées, traités scientifiques, ouvrages d'enseignement et de vulgarisation, et parfois ces derniers sont plus savants que les premiers, plus durables sans doute, eux qui dépendent moins des modes contingentes et témoignent ainsi davantage du génie propre de leur temps et de leur auteur.

Cette seconde lecture suppose une certaine familiarité avec la théorie des probabilités. On touche là un des points faibles de l'entreprise borélienne d'exposition de la science. Comment présenter des questions irréductiblement spécialisées à des non-spécialistes ? Borel, pour sa part, procède, le moment venu, lorsque vraiment il ne peut plus faire autrement, par allusions furtives et mystérieuses, comprenne qui pourra ! Nous avons adopté une ligne médiane. Dans une annexe, nous rétablissons en langue moderne, accessible au grand nombre, l'essentiel des martingales de Borel. Cette partie a pour but de faciliter la lecture de ce qui précède et peut se lire indépendamment du reste. En revanche, pour tout ce qui touche à l'émergence de la théorie mathématique des martingales dont il nous

fallait dire un mot pour situer la position originale de Borel, nous nous sommes bornés à des indications succinctes et parfois énigmatiques. Il aurait fallu un livre entier pour traiter convenablement d'un tel sujet.

Nous avons fait jouer un rôle particulier à Félix Le Dantec, savant très à la mode dans la France d'avant la première guerre mondiale mais relativement peu connu aujourd'hui. Le Dantec est un biologiste néo-lamarckien du début du siècle qui s'est battu avec verve et brio pour le transformisme et l'évolution des espèces dans un climat le plus souvent hostile, mais qui, dans le même temps, s'est opposé vigoureusement non seulement aux néo-darwinismes de Weismann et de Vries, mais aussi à la génétique mendélienne renaissante [Bateson 1902], [Morange 2000], c'est-à-dire aux théories qui vont dominer une part importante de la biologie moderne. Pour comprendre les positions de Le Dantec, il aurait fallu développer largement ses thèses, toujours pertinentes, en dépit de leur caractère résolument marginal, et les replacer dans l'histoire de la biologie du début du XX^{e} siècle, mais était-ce bien le lieu ? Nous nous sommes limités à quelques notes, d'ailleurs très insuffisantes. Le lecteur pourra toutefois se reporter à certaines des références que nous donnons, par exemple au beau livre de François Jacob [1970] qui, hélas, ne mentionne ni Le Dantec, ni même Rosny Aîné ! De façon générale, nous avons repoussé dans des notes en fin d'article tout ce qu'il nous semblait utile de signaler pour donner à notre propos un peu de relief ou moins de platitude, et ouvrir des pistes qu'il y aurait éventuellement lieu d'explorer plus avant.

2. DE L'ILLUSION DES RETOURS À L'ÉQUILIBRE AU PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

Le problème dit de Saint-Pétersbourg figure pour la première fois dans la correspondance échangée entre Nicolas Bernoulli et Pierre Rémond de Montmort au cours de l'année 1713, que ce dernier a reproduite dans la seconde édition de son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* [Montmort 1713]. Il doit son nom à un très célèbre article de Daniel Bernoulli sur le sujet paru dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* [Bernoulli 1738], objet d'innombrables commentaires passés, présents et à venir. Rappelons ce dont il s'agit dans la version qu'en donne Borel [1939, p. 60/61] : Pierre et Paul jouent à pile ou face, Pierre verse à Paul un enjeu A aux conditions suivantes. S'il gagne le premier coup, Paul lui

verse 2 francs, l'espérance mathématique de ce cas est donc deux fois $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 1 franc. S'il ne gagne qu'au deuxième coup, Paul lui verse 4 francs et l'espérance mathématique est à nouveau de 1 franc, et ainsi de suite : s'il ne gagne qu'au n-ième coup après avoir perdu tous les coups précédents, Paul lui verse 2^n francs, soit de nouveau une espérance de 1 franc. «*Comme n peut prendre successivement toutes les valeurs entières depuis l'unité jusqu'à un nombre aussi grand que l'on veut, l'espérance mathématique totale et donc la valeur de A est infinie.*» Le paradoxe réside en ce que «*personne à ce jeu n'accepterait de jouer pour un enjeu de mille francs*» (ou seulement de cent francs ou même de cinquante) : le bon sens défie les mathématiques et Borel. Que répondre ?

Borel ne paraît pas avoir fait allusion directement à ce problème dans ses premiers cours de probabilité de la Sorbonne, non plus que dans ses livres ou articles de vulgarisation écrits avant 1939. Il estime sans doute que cette intervention paradoxale de l'infini dans un jeu n'a pas d'intérêt pratique et risquerait de détourner un lecteur naïf de l'essentiel, ou peut-être n'a-t-il rien de suffisamment nouveau à dire sur cette question tournée et retournée par les meilleurs esprits depuis le début du XVIII^e^ siècle[1]. Dans son cours de probabilité de 1908, toutefois, Borel consacre un paragraphe à des « Remarques sur quelques paradoxes » [Borel 1909b, § 9] et principalement parce que c'est l'occasion de répondre aux propos négationnistes de Félix Le Dantec qui vient d'émettre sur le calcul des probabilités les plus sérieux doutes dans la *Revue du mois* fondée par Borel en 1905. Le « paradoxe des retours à l'équilibre » dont traite Borel en 1908 en réponse à Le Dantec n'a apparemment aucun rapport direct avec le problème de Saint-Pétersbourg, mais Borel indique lui-même dans l'essai philosophique sur les probabilités qui clôt son grand *Traité* [Borel 1939] qu'il n'en est pas si éloigné. La solution de 1949 que nous allons exposer concerne effectivement aussi bien le paradoxe de 1908 que celui de Saint-Pétersbourg, de sorte qu'il serait impossible de comprendre les martingales de Borel sans exposer au préalable la polémique Borel-Le Dantec, commencée en 1905 et qui n'a cessé de préoccuper notre auteur jusque dans ses dernières publications.

Borel et Le Dantec, des savants engagés

En préambule, rappelons rapidement la position des deux protagonistes de cette curieuse histoire au début du XX^e^ siècle.

Fils d'un pasteur protestant originaire de Montauban, Émile Borel, après d'éclatants succès scolaires, a soutenu en 1894 une thèse d'analyse étonnante d'originalité. Nommé bientôt par Darboux maître de conférences à l'École normale supérieure, il forme toute une génération de mathématiciens à la théorie « ensembliste » des fonctions [Borel 1898]. Il est titulaire des trois premiers cours Peccot du Collège de France de 1899 à 1901 et se marie cette année-là avec Marguerite Appell, devenant ainsi le gendre du nouveau doyen de la Faculté des sciences de Paris et le neveu par alliance de Joseph Bertrand, d'Hermite et de Picard. Lors du rattachement de l'École normale supérieure à la Sorbonne en 1904, il est nommé professeur adjoint et titularisé en 1909 dans une chaire de théorie des fonctions créée pour lui : un parcours sans faute dont il ne paraît pas se satisfaire puisque, à partir de 1905, il se consacre en parallèle à diverses entreprises de diffusion et d'exposition de la science nouvelle, particulièrement des théories cinétiques dont il tente de réduire les difficultés et les paradoxes qui les ont fait longtemps rejeter avec mépris, notamment par l'école parisienne de physique mathématique, alors qu'elles sont visiblement appelées à jouer un rôle central dans la nouvelle physique de l'infiniment petit du début du XX^{e} siècle avec ses corpuscules de toutes sortes, ions, électrons, etc. Borel, le premier, fait simplement observer qu'à l'échelle atomique l'idée de « conditions initiales déterminées » est « une pure fiction abstraite » : leur fixation hypothétique serait instantanément modifiée (par le déplacement impromptu d'un atome sur Sirius par exemple) et cet écart, d'abord imperceptible, affecterait bientôt le mouvement résultant de façon extravagante [Borel 1906ь, 1913]. La seule parade scientifique à cette « indétermination des conditions initiales » est un calcul des probabilités explicite et bien conduit dont Borel se fait dès cette époque le principal propagandiste en France.

La *Revue du mois* sert de point de ralliement et de plate-forme aux « jeunes » savants du siècle naissant, Perrin, Langevin, Pierre et Marie Curie, mais aussi Painlevé, Tannery, Drach, Caullery, Bernard, Duclaux etc. Poincaré lui-même, le plus grand de tous, dont l'hostilité aux théories cinétiques et le scepticisme à l'égard du calcul des probabilités sont assez connus, donne bientôt à la *Revue* un article retentissant [Poincaré 1907] dans lequel il admet enfin que certains phénomènes physiques à une échelle convenable sont et ne sauraient être que « fortuits » et qu'en effet

seul un calcul des probabilités peut en rendre compte dès lors que ses résultats ne dépendent plus de la particularité des conditions initiales, ce qui est le cas chaque fois que le principe ergodique probabiliste s'applique, par exemple lors du battage des cartes qui rend la distribution finale absolument indépendante de l'arbitraire des conditions initiales, sauf dans des cas de tricherie patente que la nature ne connaît pas. Il est difficilement niable que Poincaré ait été sur ces sujets en partie influencé par les réflexions de Borel, dont l'œuvre scientifique prend alors une autre dimension. Borel, dorénavant, ne ménagera aucun effort pour tenter de convaincre ses contemporains, aristocratie savante, classes moyennes, travailleurs manuels, etc., que : «*la réponse mathématique à donner à bien des questions pratiques est un* coefficient de probabilité… *Un coefficient de probabilité constitue une réponse tout à fait claire, correspondant à une réalité absolument tangible… Si la notion de* vérité statistique *devenait familière à tous ceux qui parlent ou écrivent au sujet de questions où la vérité statistique est la seule vérité, bien des sophismes et bien des paradoxes seraient évités*» [Borel 1907b, p. 698], [Borel 1914, p. 137].

Quant à Félix Le Dantec, (1869–1917), c'est le fils d'un médecin voltairien et breton qui lui a donné une éducation exclusivement scientifique pour le préserver de toute tentation métaphysique. Admis en 1885 à l'École normale supérieure, Félix Le Dantec est conquis par le transformisme et décide de se consacrer entièrement aux sciences naturelles comme nombre de normaliens de la fin du siècle, Noël Bernard ou Charles Pérez par exemple. Le Dantec se signale très tôt non seulement par ses travaux scientifiques originaux, mais surtout par des livres de vulgarisation scientifique et philosophique brillants et provocateurs. Il participe à la mission Pavie en Indochine et, en 1899, est chargé d'un cours de biologie à la Sorbonne, qu'il assurera jusqu'à sa mort en 1917, sans jamais être titularisé[2]. Partisan éloquent de l'hérédité des caractères acquis, « inscrits au patrimoine chimique », contre Weismann [1892] et de Vries [1909], Le Dantec se déclare pour un transformisme lamarckien : l'évolution des espèces est réglée par la complexification lamarckienne des individus sous « l'empire des circonstances », transmise héréditairement (voir aussi notes 3 et 10). C'est, selon Borel, «*un des esprits les plus distingués de notre temps, bien connu par ses publications scientifiques et philosophiques, et dont l'éducation mathématique a été très sérieuse*» [Borel, 1909b, p. 18].

Le hasard ne connaît aucune loi

Dans un article paru en septembre 1907, Le Dantec [1907b] s'est proposé d'examiner la notion de hasard dont Darwin et ses successeurs paraissent faire le principal moteur de l'Évolution. Pour Félix le Dantec, le hasard n'a de définition que relativement à un individu, c'est « l'ensemble des éléments du [milieu extérieur] » qui ne sont pas conséquence directe de son « fonctionnement vital » et « vis-à-vis desquels son intelligence est désarmée ». Vu de la sorte, le hasard ne saurait être le moteur de l'Évolution, ni de quoi que ce soit. Non seulement le hasard n'explique rien, mais il ne connaît aucune loi et ne peut donc être l'objet d'un calcul, si ce n'est un calcul *a posteriori*. Il se trouve en effet que *quelques* jeux (de hasard pour ceux qui y jouent) satisfont lorsqu'ils ont été convenablement organisés à une loi des grands nombres, par exemple autant de piles que de faces sur le long terme pour une pièce bien équilibrée et jetée sans parti pris. Ces « jeux de hasard » relèvent alors, ni plus ni moins que tel phénomène qu'on voudra, de la méthode expérimentale : pour une partie donnée, on ne peut rien conclure, mais globalement « la loi des grands nombres s'y vérifie », et cette prétendue « loi » est l'indice expérimental de l'existence d'une véritable loi à une échelle plus haute (les fameuses causes constantes de Laplace [1814]).

Par exemple (et l'on sent bien que c'est de cet exemple que dérive tout le reste), le hasard darwinien s'applique aux éléments les plus petits mais c'est le lamarckisme qui explique la coordination et l'adaptation de l'individu ; «*loi à l'échelle supérieure (lamarckisme), le phénomène semble régi par le hasard à l'échelle inférieure (darwinisme). Ici le mystère de la loi des grands nombres est percé à jour ; c'est parce que tous les éléments de l'échelle inférieure sont doués de vie élémentaire que leur union donne la vie à l'être à l'échelle supérieure ; ce n'est pas avec du hasard seul que l'on fait une loi*»[3] [Le Dantec 1907b, p. 285]. Le reste, selon Le Dantec, est de la mauvaise métaphysique (et pour lui toute métaphysique est mauvaise), notamment «*la probabilité d'un coup isolé est une conception qui ne rime à rien*» [Le Dantec 1907b, p. 270]. Il est possible naturellement de l'évaluer *a posteriori* après observations nombreuses, si l'on est dans un cas d'application de la loi des grands nombres, mais sa fixation, d'ailleurs bien peu précise, est sans grand intérêt. Inverser le processus et mettre en avant la probabilité d'un cas isolé pour établir une loi des grands

nombres, c'est déraisonner. D'autant que le calcul lui même est fort vague et n'apporte rien que ne sait déjà un observateur de bon sens. Il fallait, à Le Dantec (comme à Borel), un certain culot pour publier un tel article dans la *Revue du mois*, dont l'un des buts avoués est, on l'a dit, de promouvoir la valeur pratique et scientifique du calcul des probabilités [Borel 1906a, 1907b, etc.]. Borel doit répondre. C'est ce qu'il fait dans son premier cours de calcul des probabilités à la Sorbonne publié en 1909 chez Hermann [1909b].

Première réponse de Borel, le paradoxe des retours à l'équilibre

Pour démontrer que, précisément, le sens commun s'égare en présence du hasard s'il ne s'appuie sur un calcul, Borel, s'inspirant de Bertrand [1888, chap. VI] et surtout de Le Dantec [1907b,c], considère les retours à l'équilibre indéfiniment répétés du jeu de pile ou face symétrique qui permettraient en principe à un joueur patient d'attendre sûrement un gain après un retour à zéro (suivant le lemme de Borel qui paraîtra bientôt [1909a], voir l'annexe et la note 17) et de devenir infiniment riche dès lors qu'il renouvellerait suffisamment cette opération ; et ceci s'applique indifféremment à l'un ou à l'autre joueur. Le biologiste est démuni devant l'absurdité pratique de ce raisonnement, le géomètre en revanche peut montrer que les retours à l'équilibre précédant le gain d'un joueur, sur le long terme (indispensable aux gains importants de cette « martingale »), se font attendre si longtemps que la fortune escomptée est illusoire. Borel toutefois ne précise pas vraiment ses affirmations par des calculs. Il se contente de renvoyer le lecteur à un paragraphe ultérieur de son cours qui traite d'une question plus simple : un joueur gagne 1 franc à chaque retour à l'équilibre, calculer son espérance mathématique pour les n premiers coups. Le calcul est facile et conduit au résultat approché $1{,}128\sqrt{n}$. De sorte que si un joueur paye 20 francs pour jouer une série de mille coups, il sera certainement avantagé, mais s'il paye deux mille fois 20 francs, pour jouer deux millions de coups il perdra énormément à coup sûr, l'espérance de gain pour deux millions de parties étant d'environ 1 600 francs. Borel explique ce curieux phénomène de la façon suivante : les premières séries de mille coups ont probablement des retours à l'origine relativement réguliers mais si elles sont mises bout à bout, tôt ou tard il se produira, dans la série des parties, des « écarts exceptionnels » qui interdisent des retours rapides à l'équilibre et ruinent l'attente de notre joueur[4]. Pour ingénieuses

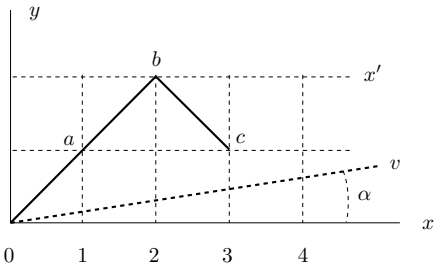
et judicieuses qu'elles soient, les considérations de Borel n'en demeurent pas moins assez peu précises numériquement. Il conclut cependant à l'inanité des raisons de sens commun dès qu'un problème est un tant soit peu complexe, et à la nécessité absolue d'avoir alors recours au calcul des probabilités. Il ajoute : «*Il y a, à mon avis, un très grand intérêt scientifique et social à ce que les principes fondamentaux du calcul des probabilités soient admis sans restriction par le plus de personnes possibles*» [Borel 1919b, p. 16/17] , peut-être même par Le Dantec, qui toutefois ne paraît pas s'en être laissé compter.

Celui-ci, en effet, réplique aussitôt par un article paru dans la *Revue philosophique* [Le Dantec 1910] et repris dans un chapitre au titre sans équivoque — « Les prétendues lois du hasard et les stratagèmes de Bernouilli » — d'un de ses nombreux ouvrages, *Le chaos et l'harmonie universelle* [Le Dantec 1911a]. Le Dantec fait partie de ces savants résolument à contre-courant, capables du meilleur et du pire, mais qui ne se laissent jamais prendre au dépourvu, notamment dans les polémiques où ils excellent[5]. Son argumentation est en tout cas remarquable. Il se propose de prouver sans calcul et sous la seule hypothèse que « le jeu de pile ou face n'obéit à aucune loi » (forme minimum de l'axiome d'irrégularité de von Mises [1919, 1931]), par la seule force d'un « raisonnement de sens commun », tous les prétendus résultats du calcul des probabilités, notamment les arguties boréliennes sur les retours à l'origine du jeu de pile ou face et la loi des grands nombres de Bernoulli, ce qui réduit ledit calcul à n'être qu'un « verbalisme mathématique » sans autre contenu que ce qui y a été mis au départ. Ce verbalisme se double d'ailleurs d'une escroquerie scientifique lorsqu'il prétend parler de la probabilité d'un événement isolé et donner à croire ainsi qu'on peut contrôler le hasard par un nombre. Il faut impérativement bannir ce verbiage de la science et ne garder que les moyennes nécessaires aux actuaires et les décomptes de combinaisons parfois bien utiles, tout le reste n'est qu'illusion ou « stratagème ». La « simple analyse mathématique » ne peut conduire à une loi physique, d'autant qu'ici il n'y a pas de loi du tout, le hasard n'en connaissant aucune par principe. Le Dantec retrouve là, on le sait, un thème récurrent chez Auguste Comte [Coumet, à paraître], auquel Borel avait répondu par avance en détachant la science des probabilités du tronc commun mathématique, afin de lui conserver ce rôle d'arbitre au-dessus des partis

et des lois qu'elle aurait perdu en s'intégrant trop intimement à la science abstraite des nombres. Pour Borel, on le sait, la théorie des probabilités a pour but «*d'arriver à prévoir avec une certitude presque absolue, humainement absolue peut-on dire, certains événements dont la probabilité est telle qu'elle se confond avec la certitude*» [Borel 1914, n°8].

La courbe de Le Dantec et le bon sens

Indiquons rapidement la part la plus originale des « raisons communes » que Le Dantec oppose aux « calculs » (non faits) de Borel. Le Dantec a en effet l'idée ingénieuse de représenter graphiquement, sur un papier quadrillé, la suite des parties de pile ou face par une ligne brisée partant de l'origine, montant d'un échelon si le coup donne pile et descendant d'un échelon sinon. Il s'agit là, sauf erreur, d'une des toutes premières fois dans l'histoire longue et riche du jeu de pile ou face qu'est adopté ce type de représentation, si constamment employé actuellement mais qui, pour lors, venait seulement d'être introduit dans les sciences expérimentales[6] (voir aussi les notes 8 et 9).



Courbe de Le Dantec [1910, p. 341] *et* [Borel 1914, p. 43]

Le Dantec fait ensuite, sur cette courbe « sinueuse », des remarques de sens commun qui ressemblent assez aux considérations de Bachelier [1900] sur les cours de bourse (dont les courbes sinueuses apparaissent dans la littérature spécialisée dès le Second Empire) et aux raisonnements à venir de Doeblin, Kolmogorov, Lévy, Doob, et de tous les probabilistes contemporains, sur les trajectoires d'une marche aléatoire. Son étude le conduit à une première conclusion (qui, selon lui, contient en réalité toutes les autres et qui s'appelle actuellement la propriété de récurrence, bien identifiée dès le début du XIX^{e} siècle par Ampère et Laplace qui, eux,

l'avaient démontrée). Si grand que soit un nombre N donné d'avance, il arrivera un moment où l'ordonnée de la courbe sera égale à N. Ce résultat provient de deux raisons de sens commun : supposons pour fixer les idées que N soit positif, nous avons la certitude que la courbe sinueuse ne va pas constamment rester au-dessous de l'axe des x, sinon elle serait assujettie à la loi de rester sans cesse négative en contradiction du principe selon lequel « le jeu n'obéit à aucune loi ». Donc la courbe sinueuse finit par monter d'un échelon au-dessus de l'axe des x. Une fois ce point atteint la courbe se renouvelle en oubliant d'où elle vient. Nous avons la certitude, en effet, que le jeu, libre de toute attache, fait à tout moment table rase du passé. Mais, pour ce nouveau jeu et sa nouvelle origine, la hauteur N est diminuée d'une unité et l'on recommence le raisonnement à l'identique en remplaçant N par $N-1$, et ainsi de suite. « Le théorème est démontré », conclut Le Dantec, qui, sans s'en rendre compte, glisse des raisons de sens commun aux mathématiques en forme, à l'inverse de Borel, qui, tout en prétendant faire des calculs, se contente parfois d'accumuler des raisons de bon sens.

Il est en effet facile de mettre en forme la plupart des raisonnements de Le Dantec, excepté le plus étonnant de tous par lequel il entend démontrer la loi (forte) des grands nombres pour le jeu de pile ou face symétrique en utilisant seulement des raisonnements qualitatifs « de sens commun » sur les retours à l'origine. Pour Le Dantec, en effet, il résulte de l'allure générale de sa courbe sinueuse que le rapport de l'ordonnée à l'abscisse $(S(n)/n)$ tend de toute évidence vers zéro. L'argument (mathématique) qu'il donne est visiblement faux (et Borel le relève), mais l'énoncé est remarquable, Borel venant à peine d'établir la dite loi forte dans son article de 1909 que Le Dantec n'a vraisemblablement pas lu. La loi des grands nombres, ou ce que certains nomment ainsi, n'est pour Le Dantec qu'une conséquence de bon sens du principe général selon lequel le hasard ne connaît aucune loi, de sorte que la prétendue démonstration de Bernoulli de la loi (faible) des grands nombres n'est qu'un « stratagème » inutile et parfaitement malhonnête. De la même façon, le dit paradoxe des retours à l'équilibre que Borel lui oppose n'existe que dans la conscience individuelle borélienne (laquelle n'est du reste qu'une propriété parmi d'autres des composants (bio)chimiques boréliens évoluant au contact du milieu) : il y a des moments où la courbe sinueuse favorise Pierre et d'autres

où elle favorise Paul, et des retours indéfinis à l'équilibre. Qui pourrait y trouver à redire ? (Habileté polémique qui répond toujours à côté de la question dont plus personne finalement ne comprend l'intérêt ou le sens). Et Le Dantec de conclure : «*Les questions de probabilité diffèrent des problèmes ordinaires de mathématiques, en ce qu'il faut* toujours *y faire intervenir, à côté du développement analytique, des raisonnements de sens commun*» [Le Dantec 1910, p. 356]. Aussi bien Bernoulli que Borel trompent donc l'opinion en prétendant calculer là où seul le sens commun peut intervenir, alors que, si ils étaient informés convenablement, les hommes «*n'auraient pas l'angoisse scientifique de croire que le hasard obéit à des lois, et ne seraient pas tentés d'essayer des martingales à Monte-Carlo*» [Le Dantec 1910, p. 360].

Seconde réponse de Borel, encore les retours à l'équilibre

Face à cette attaque frontale contre la valeur scientifique, pratique et philosophique du calcul des probabilités, Borel est forcé à la contre-attaque dans un article de la *Revue du mois* [Borel 1911], qui forme l'essentiel du chapitre II du *Hasard* de 1914. Borel est assez maladroit dans l'art polémique[7], mais c'est incontestablement (bien qu'on le conteste parfois) un mathématicien d'une profondeur de vue exceptionnelle, ce qui lui permet de saisir immédiatement les forces et les faiblesses de l'argumentation de sens commun mathématique de son ancien condisciple. Il renvoie tout d'abord Le Dantec au « Panthéon des savants distraits », en lui précisant que ce qui est paradoxal dans le paradoxe des retours à l'équilibre de Borel, ce n'est pas que les deux joueurs puissent être gagnants à des moments différents d'autant qu'ils le voudraient, il n'y a là rien d'absurde même pour un mathématicien, mais bien, en réalité, comme il est écrit dans son cours, que la fortune de l'un comme de l'autre puisse théoriquement devenir infinie avec le temps, alors que le jeu est et demeure équitable indéfiniment, et la réponse à ce paradoxe-là est trop subtile pour que le sens commun du biologiste puisse la saisir. La courbe sinueuse du jeu de pile ou face introduite par Le Dantec et dont Borel apprécie visiblement la valeur mathématique est en effet plus complexe que ne semble l'imaginer Le Dantec. Les très longues périodes de séjour au-dessus ou au-dessous de l'axe des x (les grandes excursions) ne sont pas aussi rares qu'on peut le penser (sans calcul).

Borel, cette fois-ci, n'élude pas la question et la traite de façon plus

convaincante : il se propose de montrer que la probabilité qu'au cours d'un très grand nombre de parties consécutives, mettons cent millions, la courbe de Le Dantec ne coupe pas l'axe des x est de l'ordre de 1/10 000, ce qui est loin d'être négligeable sur le très long terme où l'on se place ici. Dans ce but, Borel fait remarquer à son lecteur l'analogie de cette question avec le problème du scrutin de Bertrand [1887a], vu par Désiré André [1887] et repris par le même Bertrand [1887b], [1888] (voir *e.g.* [Feller 1950, chap. 3] pour l'énoncé du problème du scrutin). Si au n-ième coup la courbe est en m, la probabilité qu'elle n'ait jamais touché l'axe horizontal aux coups précédents, est, d'après la formule du scrutin, $|m|/n$. Par conséquent la probabilité que, jusqu'au coup n, la courbe soit restée d'un même côté de l'axe des x est $n^{-1}E(|S_n|)$, où S_n désigne l'ordonnée de la courbe de Le Dantec au coup n. Mais, ajoute Borel, $E(|S_n|)$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$, ce qui démontre le résultat annoncé. Borel aurait d'ailleurs pu faire observer que, depuis Moivre (1730), on sait que $E(|S_{2n}|) = 2nP\{S_{2n} = 0\}$, cette identité remarquable figurant aussi bien dans le cours de Bertrand que dans celui de Poincaré (voir à ce sujet [Stigler 1986] et [Diaconis, Zabell 1991]). On en déduit que la probabilité cherchée, lorsqu'on prend en considération un coup pair, $2n$, est égale[8] à $P\{S_{2n} = 0\} \approx 1/\sqrt{\pi n}$.

On se demande, comme nous l'avons dit au début de cet article, pour qui, en réalité, Borel écrivait ses ouvrages de « vulgarisation », tant ils sont riches en aperçus ingénieux et en détours énigmatiques. Borel se serait-il fabriqué un lecteur virtuel doté d'une intelligence supérieure qui le remettait en cause sans cesse, le poussait dans ses retranchements et pour lequel il réservait ses flèches les plus acérées (une sorte de Le Dantec en somme qu'il s'agissait de convaincre) ? On comprendrait mieux ainsi que Borel écrivît ses mathématiques comme des romans à clés, ce qui lui fut beaucoup reproché par la génération montante de l'entre-deux-guerres (et lui aurait certainement été reproché davantage encore par les générations suivantes si elles l'avaient lu dans le texte).

Au reste, ajoute Borel, les retours à l'équilibre sur le long terme peuvent se trouver très éloignés les uns des autres pour la raison même invoquée par Le Dantec : en effet la courbe de Le Dantec commence probablement par de petites oscillations autour de l'axe des x, mais dès qu'elle atteint une hauteur assez considérable, mettons N, ce qu'elle finit par faire nécessairement, elle se renouvelle et se met à accomplir de petites

oscillations autour de l'horizontale de hauteur N comme si elle se croyait revenue à l'origine, ce qui freine considérablement son retour vers l'axe des x et ces freinages successifs d'axes en axes ne font que s'amplifier au cours du temps. Les petites oscillations de l'origine des temps expliquent ainsi les très longues oscillations plus tardives lorsque la courbe a eu le temps de prendre un tant soit peu de hauteur[9].

Borel ne va pas au delà en 1914, mais il doit penser en lui-même que la fin de l'histoire n'est pas dite. L'une des questions posées par le paradoxe de Borel demeure sans réponse mathématique. Comment en effet faire du principe d'impossibilité d'un système de jeu, postulé par les moralistes et les mathématiciens calculateurs depuis longtemps et les biologistes de bon sens depuis peu, un énoncé mathématique clair et distinct, ne serait ce que pour le jeu de pile ou face où précisément il existe des possibilités théoriques d'enrichissement indéfini ? Les arguments de délais d'attente excessifs ne sont ils pas aussi flous et communs que les raisons de Le Dantec que Borel jugeait « sentimentales » ? Le paradoxe de Borel ne se retournerait-il pas contre lui, ne manifesterait-il pas plus clairement encore la véracité de la thèse hérétique de Le Dantec, que le bon sens des biologistes (et des joueurs) est meilleur juge en matière de hasard que les calculs des mathématiciens ? On comprend que Borel n'ait pas souhaité prolonger la polémique interrompue par la guerre, mais on imagine volontiers qu'il dut souvent se battre contre le fantôme-épiphénomène de Le Dantec mort prématurément en 1917[10]. Comment terrasser définitivement ce diable ricanant sortant sans cesse de sa boîte ? Se sentant incapable d'égaler la verve de son adversaire, Borel finira par appeler à la rescousse son ami Paul Valéry. Dans un paragraphe de son premier « Que sais-je ? », intitulé *Les probabilités et le bon sens*, Borel utilise une longue citation de *Regards sur le monde actuel* pour réduire à n'être pas grand chose le « bon sens » dont on fait tant de cas et, du même coup, les remarques ironiques et intempestives de Félix Le Dantec : «*ce bon sens est une intuition toute locale qui dérive d'expériences non précises, ni soignées, qui se mélange d'une logique et d'analogies assez impures pour être universelles*» [Borel 1943, p. 15–16][11].

Ce n'est que 25 ans plus tard, dans le fascicule final du *Traité* [1939, p. 48–50], que Borel aborde de nouveau « l'illusion du retour à l'équilibre ». La bataille du calcul des probabilités est alors gagnée et plus personne ne

se risquerait à soutenir sérieusement, comme le faisait Le Dantec, que le stratagème de Bernoulli ou la loi des grands nombres ne sont que verbalisme mathématique dont la science n'a que faire. Borel peut prendre du recul et examiner la question au fond. Il commence par rappeler l'énoncé mathématique de son cours de 1909 : le retour à l'équilibre est (presque) certain mais la valeur moyenne du temps nécessaire à un tel retour est infinie, et il ajoute : «*ce résultat, en apparence paradoxal, n'est pas sans analogie avec ce que les mathématiciens du XVIII*$^{\text{e}}$ *siècle ont appelé le paradoxe de Saint-Pétersbourg*» [Borel 1939, p. 50] (voir aussi [Bertrand 1888, § 86]). Borel a beaucoup réfléchi entre temps sur le rôle de l'infini en mathématiques, il ne se satisfait plus de sa réponse à Le Dantec. Dans les deux cas, retours à l'équilibre suivis d'un gain et jeu de Saint-Pétersbourg, l'enrichissement est assuré et potentiellement infini. Comment, dès lors, préciser la façon mathématique dont le principe d'impossibilité d'enrichissement indéfini s'intègre à un jeu de hasard à l'intérieur de la théorie mathématique classique des probabilités (modernisée par Borel et Kolmogorov) ? Quelle est la véritable consistance mathématique du paradoxe de Borel sur les retours à l'équilibre, ou de celui de Pétersbourg dont Borel affirme maintenant qu'il en est un « analogue » ? Prétendre régler la question en modifiant les principes du calcul comme Daniel Bernoulli [1738] l'avait proposé pour le jeu de Pétersbourg ou en établissant un mode d'emploi à l'usage des joueurs prudents et mortels, n'est ce pas douter de la raison humaine et des facultés explicatives des mathématiques ? Borel ne peut se dérober, il doit répondre.

3. PLUS PARADOXALE QUE LE PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG : LA MARTINGALE DE SAINT-PÉTERSBOURG

Le premier texte de Borel consacré au « paradoxe de Saint-Pétersbourg », tel que nous l'avons rappelé plus haut, figure dans le dernier fascicule du traité *Valeur pratique et philosophie des probabilités* [1939, p. 60–69]. Dans un chapitre intitulé « Réflexions sur quelques erreurs et paradoxes », Borel consacre deux paragraphes à ce problème célèbre pour lequel, souligne-t-il en introduction, bien que l'infini y intervienne dans sa forme initiale,

les remarques les plus intéressantes concernent ce qui se passe lorsqu'on « se borne au fini ». Voyons ce qu'il en dit et en quoi son apport est original.

Pour Borel comme pour de nombreux auteurs des siècles précédents (voir note 1 pour des références), l'explication du paradoxe consiste, dans un premier temps, à remarquer qu'il faut de toute évidence se limiter à des gains possibles et non astronomiquement impossibles et ne pas prendre en considération des éventualités de probabilité hypercosmiquement faible, toute la difficulté se réduisant à trouver un bon équilibre entre ces deux contraintes, de sorte d'attribuer à A une valeur acceptable par les deux joueurs ; et l'on peut faire toute confiance au sens commun de Borel pour s'acquitter intelligemment de cette tâche : «*Notre conclusion est donc que, si l'espérance mathématique de Pierre est la somme d'une série illimitée dont tous les termes sont égaux à l'unité, seuls les premiers termes de cette série sont effectivement négociables et la valeur des termes suivants devient rapidement rigoureusement nulle, car ils représentent l'espérance absolument illusoire de toucher une somme si énorme qu'elle ne pourrait être payée*» [Borel 1950, p. 96]. Cournot [1843] ne disait pas autre chose et le mathématicien reste sur sa faim (Borel aussi sans doute, et que dire de Le Dantec ?).

Le point le plus intéressant n'est pas là ; en effet, dans un second paragraphe, Borel se propose de définir un « jeu de Saint-Pétersbourg » qui serait « équitable » mathématiquement. Comment Borel procède-t-il ? Nous allons voir qu'il construit sur le jeu de pile ou face une « martingale fort simple » qui permet à Pierre d'obtenir les gains pétersbourgeois avec les mêmes probabilités [Borel 1939, § 35]. Au préalable, interrogeons nous sur cette idée de martingale (ou de jeu équitable) que Borel met en œuvre ici pour la première fois. Il est manifeste qu'elle est directement issue de la thèse de Jean Ville [1939], dont Borel a présidé le jury et qu'il a accepté de publier dans sa nouvelle collection des *Monographies des probabilités.*

L'impossibilité d'un système de jeux et la théorie des martingales de Ville

Jean Ville (1910–1989) a bénéficié à sa sortie de l'École normale supérieure en 1933 d'une bourse de recherche pour Berlin, puis Vienne, où il participe en 1934 au séminaire de Karl Menger sur l'axiomatique des collectifs de von Mises [1919]. Ce dernier, on le sait, s'est proposé de débarrasser enfin le calcul des probabilités, dont les applications physiques se multiplient, de toute référence à la notion de « probabilité

d'un événement isolé » qui non seulement ne rime à rien, selon Le Dantec, mais choque considérablement l'empirisme des nouveaux positivistes des cercles de Vienne et de Berlin que Mises fréquente. Son idée de départ est particulièrement séduisante ; il suffit de prendre pour objet mathématique de base, non plus un événement que l'on probabilise par l'opération du Saint-Esprit, mais une suite indéfinie d'événements, régie par des axiomes qui en fassent des copies mathématiques de ces suites d'événements fortuits dont la physique statistique comme la théorie de la population fournissent d'innombrables exemples. Ces nouveaux objets de pensée (qu'il est légitime de penser, selon la dogmatique du temps), les « collectifs », doivent satisfaire, selon Mises, à deux axiomes dont on s'est rendu compte à la fin des années vingt qu'ils sont logiquement inconciliables dans leur forme primitive (voir par exemple [Plato 1994]). Le séminaire de Menger a pris pour thème cet intéressant problème, et bientôt Feller, Wald et d'autres rétabliront la théorie de Mises sur des bases solides, ce qui ne l'empêchera nullement d'être délaissée quelque peu à la fin des années 1930, au bénéfice de l'axiomatique concurrente, celle de Kolmogorov, qui justement axiomatise sans trop le dire le calcul classique des probabilités d'événements isolés (tout en expliquant que cette probabilité n'a de sens physique que comme limite de fréquences). L'axiomatique de Kolmogorov va se révéler, en effet, d'une richesse mathématique supérieure, en ce qu'elle permet d'énoncer, comme Borel l'a montré déjà implicitement en 1909, des théorèmes « presque sûrs » dont la théorie de Mises ne peut rendre compte sans contorsions inutiles. Et, précisément, la thèse de Ville le manifeste de façon particulièrement lucide et fait ainsi le bonheur de Borel, pourtant difficile à impressionner. Ce dernier y voit subsidiairement une nouvelle occasion d'argumenter contre ceux qui prétendent borner exagérément les capacités naturelles de la raison humaine. Nous ne détaillerons pas ce point qui nous entraînerait trop loin, mais c'est dans ce contexte que Ville entreprend son « étude critique de la notion de collectif ».

Ville part d'un examen approfondi du second axiome de la théorie de Mises, l'axiome d'irrégularité ou d'impossibilité d'un système de jeu (e.g. [Mises 1931, p. 4]), dont l'énoncé et le statut ne vont pas de soi. Le principe d'impossibilité d'un système de jeu est clairement identifié par de nombreux auteurs des siècles précédents, notamment par Buffon,

Ampère et Cournot, et bien sûr Félix Le Dantec : dans un jeu équitable il est impossible de faire fortune à coup sûr en adoptant un système de jeu, on est même certain de s'y ruiner si l'on n'y prend garde. Comment faire de cet énoncé de bon sens un théorème ou un axiome mathématiques ? Ampère [1802] paraît être le premier à en avoir fait un théorème de la théorie classique des probabilités sous la forme la plus simple imaginable : dans un jeu de pile ou face équitable, partant de n'importe quelle fortune initiale, un joueur est assuré de se ruiner avec probabilité unité (et Ampère, dans ses commentaires, admet implicitement qu'un système de jeu ne changerait rien à l'affaire, puis Laplace et Cournot après lui, comme bien d'autres encore). C'est à partir de ce résultat (repris par Laplace en 1811) que Joseph Bertrand a bâti son chapitre sur la ruine des joueurs, qui a inspiré non seulement la martingale des retours à l'équilibre de Borel [1909b] mais aussi les travaux de Bachelier. Richard von Mises a préféré en faire un axiome de sa théorie des collectifs [Mises 1919] : dans un collectif, toute sélection faite en connaissance du passé seulement ne modifie pas la fréquence fondamentale, autrement dit, un joueur de la théorie misienne qui choisirait ses entrées dans le jeu au vu des résultats précédents, ne modifierait pas sa probabilité de gagner ou de perdre. Cet axiome devient bientôt un théorème de la théorie (classique modernisée) de Kolmogorov, grâce à Doob [1936].

Ville entend préciser et étendre la notion de système de jeu, qui est trop restrictive chez von Mises pour rendre compte de la pratique (idéalisée ou non) des joueurs. Dans le cas de l'alternative équiprobable, pile ou face, 1 ou 0, le système de jeu le plus général revient pour l'un des joueurs, mettons Pierre, à se donner deux suites de fonctions positives de somme inférieure ou égale à 1, $\lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mu_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, qui fixent ses enjeux au coup suivant, $n+1$, après qu'il ait observé la suite des n résultats précédents, de sorte que, si $s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne sa fortune après le n-ième coup, Pierre parie $\lambda_n s_n$ sur $x_{n+1} = 1$ et $\mu_n s_n$ sur $x_{n+1} = 0$. On a alors évidemment

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} s_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) + \frac{1}{2} s_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$$

et réciproquement une telle propriété de moyenne conditionnée par le résultat des n premiers coups, dite propriété de martingale, liant ensemble la suite des fortunes positives de Pierre, permet de définir deux suites

d'enjeux aux conditions précédentes et donc un système de jeu, ou une martingale, possible pour notre joueur. Richard von Mises limitait ses systèmes de jeu à choisir à bon escient, au vu des résultats, quelle partie le joueur devait jouer, Ville autorise maintenant le joueur à changer ses mises comme il le veut, dans les limites de sa fortune et de sa connaissance du jeu, conformément à l'usage. Il ne reste plus, le cadre étant précisé, qu'à faire la théorie des martingales et à répondre en son intérieur aux paradoxes évoqués ci-dessus.

Ville commence par définir la notion générale de martingale (positive) adaptée à une suite quelconque (X_n) de variables aléatoires, par la propriété de martingale maintenant classique (*e.g.* [Neveu 1972]), l'espérance conditionnelle étant « définie » « au sens indiqué par M. Paul Lévy » (c'est-à-dire assez librement, [Lévy 1937], mais qui ici ne pose pas de problèmes mathématiques). Ville [1939, p. 100] montre alors que toute martingale positive d'espérance égale à 1 satisfait, pour tout λ supérieur à 1, une inégalité (maximale) qu'il appelle l'inégalité de la ruine des joueurs. La fortune du joueur restant bornée, il ne peut que se ruiner : le principe d'impossibilité d'un système de jeu devient une inégalité générale sur les martingales positives

$$\Pr\{\sup s_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\cdot$$

La démonstration de Ville est remarquablement simple et élégante. Elle consiste à former la suite σ_n, égale à s_n si $\sigma_{n-1} \leq \lambda$ et à σ_{n-1} sinon, c'est-à-dire la martingale initiale laissée constante dès qu'elle dépasse λ (autrement dit avec les notations contemporaines, $\sigma_n = s(T \wedge n)$, si $T = \inf\{n\,;\ s_n > \lambda\}$). Ville montre que la suite σ_n est une nouvelle martingale d'espérance unité ; l'inégalité s'en déduit alors aisément. Ce type de raisonnement « par arrêt » est repris par tous les bons auteurs, c'est devenu un classique de la théorie. Ville a étendu l'inégalité de la ruine des joueurs au cas continu dès 1938 [Ville 1938, 1939]. En revanche ni Ville, ni Borel (ni Lévy) ne paraissent s'être aperçus que les martingales positives de Ville convergent presque sûrement (mais généralement pas en moyenne), résultat qui revient entièrement à Doob [1940, 1953] ainsi que l'étude de la convergence des martingales de signe quelconque pour lesquelles la condition d'équi-intégrabilité est essentielle (sur toutes ces questions, voir [Crépel 1984a]).

En fait, la « propriété de martingale » a été explicitement introduite dès 1934 par Lévy (sous le nom énigmatique de condition C) afin d'étendre le théorème central limite puis la loi du logarithme itéré aux variables dépendantes, dans la continuité des travaux de Serge Bernstein [1926] et des siens propres ([Lévy 1934, 1935, 1936a, 1937] et [Crépel 1984a]). Il n'est pas douteux que Ville en ait été influencé, au moins après coup, comme il l'écrit d'ailleurs en introduction de sa thèse. Toutefois, Ville est le premier à identifier véritablement le rôle central des martingales en théorie des probabilités et à en indiquer plusieurs applications intéressantes ; ainsi qu'il l'explique fort bien lui-même au début du chapitre V de sa thèse : «*Les fondements de toutes les sciences resteront toujours controversés. Quoi qu'on pense de l'utilité des martingales pour élucider, comme nous avons tenté de le faire, les difficultés d'une définition de l'irrégularité, nous nous proposons de montrer ici que cette notion peut également servir des buts mathématiques précis. Nous allons dans ce chapitre passer en revue un certain nombre de questions classiques ; nous associerons à chaque problème un jeu équitable hypothétique, et nous étudierons l'espérance mathématique correspondante. Nos considérations reviennent au fond à traiter dans les cas étudiés, le problème de la ruine des joueurs, mais d'un point de vue nouveau : la probabilité de ruine ne sera pas évaluée pour elle-même, mais pour servir à établir certaines propositions sur la limitation des écarts*» [Ville 1939, p. 78].

Ville a exposé ses résultats en 1938 au « Séminaire Borel » dont Ville et Doeblin sont de fait les initiateurs [Crépel 1984b] et, comme il l'indique, «*la discussion qui s'en est suivi m'a été d'un grand profit*» [Ville 1939, p. 2]. Le profit a sans doute été partagé, puisque Borel dès l'année suivante éclaire le paradoxe de Saint-Pétersbourg en lui « associant » un jeu équitable à la manière de Ville, c'est-à-dire en construisant sur le jeu de pile ou face symétrique une « martingale fort simple » qui donne à Pierre les gains de Pétersbourg avec les mêmes probabilités, les mises étant à chaque partie identiques pour Pierre et Paul et le jeu parfaitement interchangeable, ce qui rend au problème initial sa symétrie perdue et lui donne en même temps un surcroît d'étrangeté.

La martingale de Saint-Pétersbourg

De façon à éviter les redites, nous présentons ici la deuxième version borélienne de cette martingale fort simple, celle de 1949–1950, la version

d'avant-guerre n'en différant que par un facteur 2. Paul et Pierre jouent donc à pile ou face, Pierre gagne si la pièce tombe sur pile. L'enjeu de la première partie est 2, celui de la seconde est 6, celui de la troisième 16 et ainsi de suite, celui de la n-ième $(n+1)2^{n-1}$. Si Pierre décide d'arrêter de jouer dès qu'il gagne une partie, mettons la partie n, il est visible que son gain sera alors celui du jeu classique de Pétersbourg, 2^n, et la probabilité d'une telle éventualité est bien $1/2^n$; ses pertes cumulées, s'il perd cette même n-ième partie comme toutes les précédentes, seront $n \cdot 2^n$. Si donc n est assez grand, cette perte dépassera la fortune totale de Pierre et le jeu s'arrêtera nécessairement. Le jeu est équitable mathématiquement et pratiquement, mais ne peut se prolonger au-delà des ruines de Pierre ou Paul. C'est la face cachée du jeu qui donne à Pierre l'assurance de gagner à tout coup, s'il n'est pas ruiné avant. Cette remarque, et Borel le souligne, s'applique tout aussi bien à la martingale classique : « doubler sa mise en cas de perte » (voir l'annexe pour les détails).

L'inégalité de Ville n'est pas d'un grand secours pour l'une ou l'autre de ces deux martingales qui oscillent librement sur toute la droite réelle, et Borel sans doute s'en est rendu compte. Quoi qu'il en soit, le texte de 1939 s'arrête là ; Borel indique qu'il faudrait que les deux joueurs conviennent de limiter le nombre de jeux, sans préciser exactement ce qui se passerait alors et lequel des deux joueurs y trouverait avantage, le cas échéant. Les mêmes remarques s'appliquent au § 59 de son livre de 1941 *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes* qui traite du même problème, Borel ne faisant, comme souvent, que recopier ce qu'il a déjà écrit en l'adaptant au public concerné (quel est le public concerné ?). Dans ce dernier livre, cependant, Borel consacre un paragraphe aux « martingales » [Borel 1941, § 31, p. 93–97], dans lequel il revient sur l'apparent paradoxe d'un jeu équitable avantageux à coup sûr, et qui ruine presque certainement si l'on n'y prend garde. La raison en est simple : «*les martingales ne peuvent avoir pour effet de modifier les conditions du jeu, . . . , mais elles peuvent modifier beaucoup les limites de la chance*» [*Ibid.*, p. 93], jusqu'à ruiner ceux qui s'y livrent, dont la fortune est trop limitée pour supporter longtemps de si grands écarts.

Il est dommage que Borel ou Ville n'aient pas poursuivi leurs réflexions sur la théorie mathématique et pratique des martingales. La guerre a éclaté en septembre 1939 et a tout interrompu[12]. Borel, qui a dû quitter

Paris après son incarcération par les Allemands en novembre 1941, n'est revenu à la martingale de Saint-Pétersbourg que dix ans plus tard, dans trois notes à l'Académie des sciences [Borel 1949b,c,d], aussitôt reprises dans la dernière édition de ses *Éléments* [Borel 1909b/1950, note 10] et dans son dernier « Que sais-je ? » de probabilité [Borel 1950, note finale]. Il est difficile d'en connaître les raisons. Borel, à ce moment-là, publie une série de notes sur la classification des ensembles de mesure nulle, détaillées dans ses *Éléments de théorie des ensembles*, l'un des volumes de la nouvelle collection qu'il dirige chez Albin Michel, la *Bibliothèque d'éducation par la science*. Borel, dont les *Éléments de la théorie des probabilités* sont épuisés depuis longtemps, décide de confier à cette même collection le soin de réimprimer son ouvrage, ce qui sera fait en 1950. Il est possible qu'il ait voulu y apporter une contribution originale et que son choix se soit porté sur le problème de Saint-Pétersbourg. Il est possible aussi, quoique peu vraisemblable, que Borel ait été informé (par Ville ou Fréchet) du brillant exposé fait par Doob [1949] au Colloque de calcul des probabilités organisé par le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) à Lyon au début de l'été 1948[13]. Au cours de cet exposé, Doob a expliqué devant Fréchet et Lévy sa théorie des martingales et deux applications spectaculaires, la loi forte des grands nombres pour des variables indépendantes et de même loi ainsi que le théorème de Laplace-Bienaymé-Bernstein-Mises presque sûr. (Rappelons que c'est également Doob qui a montré en 1934 que la loi forte des grands nombres de Kolmogorov est une conséquence élémentaire du théorème ergodique de Birkhoff-Khinchin.)

La martingale de Borel est équitable si on borne le temps

Résumé à l'extrême, l'apport original de Borel au problème de Saint-Pétersbourg en 1949–1950 consiste à remarquer que sa martingale de 1939 jouit des curieuses propriétés suivantes : appelons $X(n)$ le gain (algébrique) cumulé de Pierre après la énième partie, $X(n)$ est d'espérance nulle (le jeu est mathématiquement équitable). Le gain de Pierre est constamment négatif jusqu'à ce que pile se produise, à ce moment seulement que nous noterons T, il devient positif et égal à 2^T, Pierre quitte alors le jeu en emportant son gain. Borel montre que $E(T) = 2$, que $E(X(T))$ est infinie et que cependant si n est un entier donné, on a encore

$$(*) \qquad E\big[X(\min(T,n))\big] = 0$$

(voir l'annexe), de sorte que si Pierre décide de ne pas aller au delà de n parties pour éviter le risque d'être ruiné, le jeu arrêté demeure équitable. Il ne lui devient infiniment favorable que s'il le laisse suivre son cours naturel, « virtuellement » infini (et virtuellement infiniment risqué pour Pierre comme pour Paul).

Le principe d'impossibilité d'un système de jeu se traduit maintenant par les égalités (*). Une martingale arrêtée en un temps (d'arrêt) « borné » est d'espérance constante : rien ne peut jamais modifier l'espérance mathématique si l'on borne le temps (et d'ailleurs, inversement, les égalités (*) sont équivalentes à la « propriété de martingale », comme on le sait). En revanche, un temps d'arrêt « fini », mais virtuellement infini, peut modifier arbitrairement la valeur de l'espérance du joueur, même si la valeur probable de ce temps est finie (égale à 2 ici). On doit alors pour ces temps d'arrêt-là développer une théorie spéciale qui, de toutes façons, ne concerne que le mathématicien. Enfin une réponse mathématique satisfaisante à tous les paradoxes de martingales et, en même temps, un énoncé mathématique raisonnable du principe d'impossibilité des systèmes de jeu, les égalités (*) !

Borel en fut-il un instant grisé ? Il n'y a plus de paradoxe à distance finie fixée à l'avance, le jeu est et demeure équitable, le paradoxe résulte simplement de la considération d'un infini virtuel auquel les hommes n'ont, de toutes façons, qu'un accès virtuel et paradoxal. Borel explique nettement que le paradoxe de Saint-Pétersbourg est une version adoucie du véritable paradoxe des martingales : un système de jeu équitable susceptible de se prolonger indéfiniment peut devenir infiniment avantageux pour celui qui règle les mises et l'arrêt du jeu. Et ce paradoxe est, selon Borel, plus paradoxal encore que le précédent, puisqu'il revient à dire que Pierre peut s'assurer les mêmes avantages qu'au jeu de Saint-Pétersbourg, sans verser en échange un centime à Paul [Borel 1950, p. 133] et sans que ce dernier puisse y trouver à redire. Borel, qui en a vu d'autres, ne se laisse pas enfermer dans ce paradoxe-là, il conclut : « *On constate ainsi qu'il a suffi d'introduire l'infini sous une forme virtuelle pour que cesse d'être exact le principe d'après lequel un jeu est équitable s'il se compose d'un nombre fini de parties dans chacune desquelles le jeu est équitable* » [*Ibid.*, p. 132]. Non seulement « l'infini réalisé », apanage des hautes mathématiques, fait de cette belle science une discipline abstraite, mais « l'infini virtuel » non

réalisé suffit déjà à entraîner le mathématicien au delà des réalités de notre monde (voir aussi [Borel 1946]). Les docteurs de la scolastique eussent sans doute aimé débattre de l'infini virtuel de Borel qu'ils auraient situé quelque part entre l'infini en puissance de la théorie péripatéticienne et l'infini syncatégorique de l'École de Paris, mais nous ne connaissons aucun commentaire plus récent et moins virtuel sur cette intéressante contribution borélienne à la théorie de l'infini.

On nous objectera sans doute que tout cela ne va pas très loin, que les égalités (*) de Borel sont déjà implicites dans la démonstration de l'inégalité de la ruine des joueurs de Ville que nous avons rappelée ci-dessus et que, de toutes façons, un étudiant moyen de probabilité sait (plus ou moins) arrêter les martingales comme il le faut. Certes, mais s'il le sait c'est précisément parce que la théorie des martingales et des temps d'arrêt a été édifiée dans les années cinquante et soixante par des mathématiciens qui s'étaient trouvé confrontés directement ou indirectement au paradoxe des martingales de Borel (voir [Neveu 1972]). Qui, en 1949, connaissait la martingale de Saint-Pétersbourg et son comportement virtuellement paradoxal ? L'un d'entre nous (Kai Lai Chung) s'est livré à une enquête rapide auprès de Doob (début avril 1999), d'où il ressort que ce dernier, le fondateur de la théorie moderne des martingales, n'a jamais pensé à établir de formule ressemblant à (*) avant son livre fondamental de 1953 où elle figure comme corollaire d'un résultat général. Doob affirme n'avoir pas eu connaissance de (*) avant cette date[14].

Certes, Borel aurait pu insister davantage sur la généralité de son résultat, par exemple traiter de la même façon le paradoxe des retours à l'équilibre de 1908 ; il ne l'a pas fait explicitement mais il l'indique rapidement en passant. Il aurait pu, aussi bien, proposer une théorie générale des égalités du type (*), il ne l'a pas fait non plus. Borel a le génie des idées lumineuses et en même temps celui de les mettre sous le boisseau. Il ne faut jamais trop en faire ; on risquerait d'encourager les mathématiciens médiocres en leur expliquant trop longuement ce qui va de soi et de décourager les travailleurs manuels en les noyant sous les symboles. En l'occurrence, Borel en a fait si peu que personne ne paraît avoir remarqué que son « Que sais-je ? » de 1950 apportait une solution mathématique originale au paradoxe de Saint-Pétersbourg et, dans le même temps, démontrait sur un cas particulier une identité remarquable

de la théorie (à naître) des martingales arrêtées et en assurait ainsi la cohérence rationnelle et la valeur représentative. Borel ne paraît pas non plus avoir noté que toutes les égalités (*) résultent d'un même théorème général, assurant que la suite $\{X(\min(T,n))\}$ est une nouvelle martingale, comme l'avait fait dans un cas particulier (fondamental) Ville dès 1938 et comme le feront tous les auteurs après Doob [1953]. Mais décidément Borel ne se préoccupe pas de la théorie générale des martingales qui deviendra bientôt, on le sait, une des grandes théories probabilistes des années soixante aux applications innombrables.

L'important est ailleurs pour Borel ; il s'agit une fois de plus, et cette fois sera la dernière, de répondre à Le Dantec : le calcul des probabilités terrasse enfin le bon sens pris aux pièges des martingales. Non seulement le véritable savant peut réduire le bon sens au calcul des probabilités comme l'avait suggéré Laplace mais il est capable de remplacer le bon sens défaillant par un calcul de probabilités susceptible, bien davantage que les traités de Le Dantec, de délivrer enfin l'homme de ses angoisses et de combler son désir naturel de certitude. C'est le sens du « Que sais-je ? » de 1950 : *Probabilité et certitude*. Le calcul des probabilités conduit à la « certitude absolue » et non plus seulement aux certitudes de sens commun de Laplace et Condorcet[15].

Le problème de Saint-Pétersbourg

Il resterait à traiter du problème pratique (doit-on jouer au jeu de Pétersbourg et à quel prix ?), mais Borel [1950], [1958] sur ce point (qui au fond ne l'intéresse guère) s'en tient aux généralités habituelles dont nous ne dirons rien, auxquelles il ajoute, on l'a souligné déjà, la remarque fondamentale qu'une martingale, aussi séduisante soit-elle, présente la particularité inquiétante d'exagérer sensiblement les écarts quand bien même on l'arrêterait en un temps fixe. Comme l'avait fort justement fait observer Condorcet pour répondre déjà au paradoxe de Saint-Pétersbourg, ce n'est pas parce qu'un jeu est (mathématiquement) équitable qu'il est indifférent aux deux parties. Il faut tenir compte également de la variabilité plus ou moins importante des issues possibles et des risques que ces dernières font courir aux deux joueurs qui s'affrontent [Condorcet 1994], voir aussi [Cournot 1843, § 62]. Pour s'en rendre compte le plus simple est encore de calculer la loi des gains de Pierre $X(\min(T,n))$, pour des valeurs modérées de n, mettons de 1 à 10. Pour la martingale de Saint

Pétersbourg, la chose est aisée et permet de se convaincre décidément de ce que Paul a beaucoup à perdre à jouer ce jeu équitable avec Pierre.

Nous reproduisons ci-dessous une table calculée par James A. Given à notre demande dans le cas de la martingale des retours à l'équilibre, table qui parle d'elle-même et n'encourage pas particulièrement Pierre à jouer ce jeu équitable avec Paul. T_1 désigne comme ci-dessus le temps du premier pile et $X(t)$ le gain (cumulé) de Pierre au temps t (partant de zéro) à un jeu de pile ou face équitable, la table donne en ligne la loi de $X(\min(T_1, t))$, pour t allant de 1 à 10. Par exemple à la ligne $t = 5$, on lit dans la dernière colonne $P\{X(\min(T_1, t)) = 1\} = \frac{22}{32}$.

t \ X	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
1										$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
2									$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
3								$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{5}{8}$
4							$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{2}{16}$	$\frac{10}{16}$
5						$\frac{1}{32}$		$\frac{4}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{22}{32}$
6					$\frac{1}{64}$		$\frac{5}{64}$		$\frac{9}{64}$		$\frac{5}{64}$	$\frac{44}{64}$
7				$\frac{1}{128}$		$\frac{6}{128}$		$\frac{14}{128}$		$\frac{14}{128}$		$\frac{93}{128}$
8			$\frac{1}{256}$		$\frac{7}{256}$		$\frac{20}{256}$		$\frac{28}{256}$		$\frac{14}{256}$	$\frac{186}{256}$
9		$\frac{1}{512}$		$\frac{8}{512}$		$\frac{27}{512}$		$\frac{48}{512}$		$\frac{42}{512}$		$\frac{386}{512}$
10	$\frac{1}{1024}$		$\frac{9}{1024}$		$\frac{35}{1024}$		$\frac{75}{1024}$		$\frac{90}{1024}$		$\frac{42}{1024}$	$\frac{772}{1024}$

Signalons pour être complet que Borel ne s'est jamais intéressé à la théorie de l'espérance morale de Daniel Bernoulli [1738], objet de tant de passion et de commentaires dans les années d'après-guerre. Il n'est pas exagéré de considérer, comme l'écrit S.M. Stigler, que le problème de Saint-Pétersbourg et le dilemme du prisonnier alimentent une grande part des débats de plusieurs des théories économiques modernes. Borel indique simplement que la notion d'espérance morale est intéressante au point de vue psychologique mais est maintenant « abandonnée » [Borel 1950, p. 93]), alors que Fréchet [1947] vient d'en saluer l'usage chez Buffon. Il y a là un curieux point d'histoire qu'il serait intéressant de développer

davantage mais qui relève d'un tout autre sujet (voir *e.g.* [Jorland 1987], [Dutka 1988] et leurs références). La solution de Borel, nous l'avons dit, est mathématique (et pédagogique) et sa valeur pratique des plus réduites. Encore une fois son but est ailleurs. Il ne s'agit pas d'encourager ou de décourager Pierre à jouer la martingale de Saint-Pétersbourg ou toute autre martingale qu'il voudra, mais de montrer en quoi les mathématiques bien conduites peuvent lever tout paradoxe à ce sujet, contrairement à ce que certains mauvais esprits insinuent. Borel ne paraît d'ailleurs pas s'être intéressé directement aux théories économiques des années 1945–55. Rappelons toutefois qu'il a développé le premier dès 1920 une théorie des jeux de stratégie qui anticipe notablement la théorie des jeux de von Neumann et Morgenstern. En particulier sa solution du classique « feuille, caillou, ciseaux » est merveilleusement limpide. On se reportera à [Borel 1938], rédigé par Ville, et à [Borel 1941] pour un aperçu de ces travaux que nous ne discutons pas ici (voir aussi [Fréchet 1959], [Guilbaud 1961] et [Dell'Aglio 1995])[16].

En guise de conclusion

Mais notre histoire ne s'achève pas là et d'ailleurs ne s'achève pas : le paradoxe de Saint-Pétersbourg n'en finira jamais de défier la raison humaine, et Borel le sait. Peu de temps avant sa mort, il entreprend d'écrire une histoire de l'énergie qui doit s'intituler « De Prométhée aux Curie ». Le manuscrit, inachevé, semble s'être égaré. On dispose toutefois de deux paragraphes reproduits en 1958 dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré* [Borel 1958], qui portent, on s'en serait douté, sur la théorie des quanta et le problème de Saint-Pétersbourg. Borel traite une fois encore de sa martingale et souligne la « grande analogie » qu'il y a, selon lui, entre l'hypothèse des quanta et l'une des solutions classiques du problème de Saint-Pétersbourg. Borel rappelle en effet que le théorème d'équipartition de l'énergie de la théorie cinétique, si bien vérifié par ailleurs, exigerait, si on voulait l'appliquer au rayonnement noir, que l'on attribue aux fréquences les plus élevées une énergie de plus en plus démesurée. La solution de Planck consiste à postuler qu'une énergie de fréquence ν ne peut se propager que par quantum de valeur $h\nu$ de sorte qu'elle ne peut être présente si ce produit dépasse la valeur totale de l'énergie disponible et qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte, pas davantage en somme que des éventualités très peu probables qui affectent le jeu de

Saint-Pétersbourg, dont la réalisation est impossible. Et Borel conclut : «*Cette énergie totale disponible, dont on doit admettre qu'elle est finie, même si elle a une valeur élevée, joue ici le rôle que joue dans le paradoxe de Saint-Pétersbourg, la fortune totale des deux joueurs, sur laquelle on n'a aucun renseignement précis, mais dont on doit cependant admettre qu'elle a une valeur déterminée, donc finie*» [Borel 1958, p. 5]. On imagine volontiers que Borel aurait aimé définir des grains de probabilité qui permettent à l'homme de s'évader enfin de l'enfer des paradoxes et qu'il a emporté ses derniers rêves pétersbourgeois dans le carré protestant du vieux cimetière de Saint-Affrique où il repose. «*On jette enfin de la terre sur la teste et en voilà pour jamais*».

Remerciements

Nous remercions très chaleureusement notre ami Pierre Crépel qui nous a encouragés à rédiger cet article. Steve Stigler a bien voulu relire notre manuscrit, ses suggestions nous ont été précieuses. Les rapporteurs de la *Revue d'histoire des mathématiques* nous ont indiqué un grand nombre de corrections et d'améliorations très judicieuses et souvent déterminantes, nous leur en sommes infiniment reconnaissants. Nous tenons à remercier également Monsieur Pierre Guiraldenq, organisateur des journées Borel de Saint-Affrique en juillet 1999, qui a suscité par son initiative un renouveau d'intérêt pour l'œuvre d'Émile Borel [Guiraldenq 1999].

ANNEXE : LES MARTINGALES DE BOREL

Pierre et Paul jouent à pile ou face. Pierre gagne si pile se produit et perd sinon. Notons $\{Y_n\}$ la suite de variables aléatoires prenant les valeurs $+1$ ou -1 suivant que le résultat des parties successives est pile ou face. Une « martingale de Borel » consiste à se donner une suite $\{b_n\}$ de nombres positifs ou nuls et à former la suite

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b_n est la somme que parie Pierre à la n-ième partie ; par exemple, la martingale de Saint-Pétersbourg correspond à $b_n = (n+1)2^{n-1}$, de sorte que $b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2^n$.

Dans tous les cas, $\{X(n)\}$ représente la suite des gains cumulés de Pierre au cours du jeu. C'est une martingale centrée au sens de Ville et Doob, l'espérance de gain de Pierre est nulle à chaque partie et la connaissance du jeu jusqu'à la partie n ne modifie en rien la fortune que notre joueur peut espérer de la partie suivante. Le paradoxe réside en ce que, si on arrête le jeu en un temps ne dépendant que des parties déjà jouées, ce que depuis Doob on appelle un « temps d'arrêt », l'espérance de gain de Pierre peut prendre une valeur arbitraire, éventuellement infinie.

Dans l'exemple de la martingale de Saint-Pétersbourg, le temps d'arrêt est simplement l'instant de première apparition de pile, c'est-à-dire la première fois que Pierre gagne. Notons de nouveau T ce temps, on a visiblement

$$P\{T = n\} = 2^{-n}, \quad E(T) = 2, \quad E\big[X(T)\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\Big) 2^{-n},$$

quantité égale à une infinité de 1 dans le cas dont il s'agit.

De façon générale, le jeu ne resterait équitable pour une martingale de Borel, arrêtée au temps T du premier pile, que si la série de terme général $b_n 2^{-n}$ convergeait, auquel cas on aurait bien alors

$$E\big[X(T)\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\Big) 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0.$$

Borel fixe maintenant un temps n et entreprend de calculer l'espérance $E(X(\min(T, n))$ comme on l'a dit. Celle-ci se compose de deux parties,

l'une positive et égale à $\sum_{k=1}^{n}\big(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} b_j\big)2^{-k}$, l'autre négative réduite à un terme $\big(\sum_{k=1}^{n} b_k\big)2^{-n}$, lesquelles s'équilibrent comme on le voit en développant la double somme de la partie positive, ou bien simplement en remarquant, comme le fait Borel [1950, note finale], que dans le cas de Pétersbourg les deux parties sont égales à n, et en considérant sans doute que cela suffit pour emporter la conviction dans le cas général. (C'est le principe de raison suffisante de Poincaré : si un cas particulier relativement quelconque est vérifié, c'est une indication suffisante pour la généralité de la propriété, à un ensemble de mesure nulle près.)

Borel donne, comme second exemple d'application de sa formule, « la martingale » la plus connue dite parfois de d'Alembert, celle qui consiste pour Pierre à doubler sa mise à chaque coup jusqu'à ce que pile se produise. Cette martingale correspond au choix de $b_n = 2^{n-1}$, de sorte que $b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1$, d'où il résulte que $X(T) = 1$; le jeu devient ainsi favorable à Pierre, mais s'il l'arrête à un temps n fixé d'avance, il redevient équitable mathématiquement, $E(X(\min(T, n)) = 0$.

Borel semble indiquer que la même égalité est vérifiée par sa martingale de 1908, lorsque Pierre s'arrête au premier pile après retour à l'équilibre. D'après [Le Dantec 1910, p. 354–355], cette martingale est connue des joueurs sous le nom de « faire » Charlemagne. C'est bien entendu encore une martingale de Borel. Cette fois-ci, Pierre ne modifie plus sa mise qui demeure constante (disons égale un rouble pour chaque n) : le gain cumulé $X(n)$ de Pierre à la n-ième partie est alors égal à la somme des variables Y au cours des n premières parties. Pour que la martingale devienne avantageuse à Pierre, il ne lui suffit plus de s'arrêter au temps T du premier pile, il lui faut attendre plus longtemps en général. Borel choisit d'arrêter le jeu dès le premier pile suivant un retour à l'équilibre.

Posons donc $T_1 = \inf\{n\,;\ X(n) = 1\}$. Depuis très longtemps on sait que T_1 est fini avec probabilité 1 ; c'est aussi une conséquence du lemme de Borel comme cela est rappelé ci-dessus[17]. Borel ajouterait ici fort à propos que T_1, bien que presque certainement fini, est « virtuellement infini » puisqu'on ne saurait le borner par une quantité certaine, aussi grande fût-elle. En exploitant l'argument du scrutin déjà présenté ci-dessus, on obtient facilement, à la suite de Bertrand [1887b, 1888], Borel, Bachelier et beaucoup d'autres (*e.g.* [Feller 1950])

$$P\{T_1 = 2n+1\} = \frac{1}{2n+1} C^n_{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}}$$

pour tout entier n, et par conséquent $E(T_1) = \infty$, ce qui prolonge assez nettement, pour Pierre, la durée moyenne d'attente d'un gain. On a évidemment $X(T_1) = 1$, (et si Pierre recommence indéfiniment à jouer de la sorte, il finira par obtenir un gain infini). Cependant pour tout n fixé, Borel semble admettre dans ses derniers textes de 1949–1950 qu'on a encore $E(X(\min(T_1, n)) = 0$. Ce qui est naturellement exact et d'ailleurs très simple à montrer directement, par exemple de la façon suivante : fixons n, et cherchons à évaluer $E(X(\min(T_1, n))$. Cette espérance se compose de deux parties, l'une positive lorsque l'arrêt se situe avant $2n+1$, qui est égale à $P\{T_1 \leq 2n+1\}$, l'autre négative dans le cas contraire, qui vaut

$$\begin{aligned} E\big[X(2n+1)\,1_{\{T_1>2n+1\}}\big] &= -E\big[X(2n+1)\,1_{\{T_1\leq 2n+1\}}\big] \\ &= \Big[\sum_{k=1}^{n} E\big[(1+Y_{2k+2}+\cdots+Y_{2n+1})1_{\{T_1=2k+1\}}\big]\Big] \\ &= -P\{T_1 \leq 2n+1\}. \end{aligned}$$

Toutefois Borel n'a pas écrit ce raisonnement ni un autre ; peut-être a-t-il tenté sans conviction de le remplacer par un calcul combinatoire qui ici ne va pas de soi et a-t-il estimé que cela devenait « fastidieux » ?

NOTES

1. Voir *e.g.* [Cournot 1843], [Todhunter 1865], [Samuelson 1977], [Jorland 1987], [Dutka 1988], [Hald 1990, 1998] ou [Condorcet 1994] pour des références et des développements. S. Csörgö et G. Simons annoncent depuis quelque temps déjà un ouvrage entier consacré au paradoxe de Saint-Pétersbourg qui a donné lieu depuis trois cents ans à une littérature immense, dont on imagine mal qu'elle puisse se tarir un jour.

2. Raïssa Maritain suivit avec son futur mari l'enseignement de Le Dantec dans les nouveaux locaux de la Faculté des sciences de Paris au début du siècle ; pour eux, ce fut «*le plus brillant, le plus attachant de nos professeurs*», un «*homme bon, généreux, loyal*» avec lequel ils entretinrent des relations d'amitié confiante. Sa théorie de la conscience épiphénomène et son athéisme «*convaincu, absolu et calme*» n'empêchèrent d'ailleurs pas Jacques et Raïssa Maritain d'être séduits par la philosophie de l'intuition de Bergson dont les cours au Collège de France connaissaient alors un succès considérable. Ils sont peu de temps après convertis au catholicisme par Léon Bloy et adhèrent à un thomisme intégral aux antipodes de la philosophie de Le Dantec, qui, (pour une fois) uni à Borel contre ceux qui détournent la jeunesse de la « Science moderne » et de la véritable intuition, polémiquera quelque temps contre Bergson. (Voir à ce sujet [Maritain 1941, p. 75–77 et suivantes], [Maritain 1910], [Borel 1907a, 2000], etc.)

3. Ce qui intéresse avant tout Le Dantec, c'est le « phénomène de la vie », qu'il entend traiter en physicien, comme Fourier traitait de la chaleur. L'évolution des espèces doit donc être expliquée de l'intérieur par les propriétés du vivant et non de l'extérieur par le hasard des circonstances. Il écrit par exemple : «*Darwin ne s'est jamais demandé quelle est la cause des variations des êtres vivants. Il eût fallu pour cela rechercher d'abord ce qu'est la vie… Il a attribué les variations au hasard, et leur conservation ou leur destruction aux facteurs du milieu qui sont étrangers à l'être vivant lui-même. Cette croyance à la possibilité d'une explication de la coordination par le hasard est parente de la croyance aux* lois du hasard *; elle est commune à beaucoup d'esprits éminents, tant parmi les naturalistes que parmi les mathématiciens…* » [Le Dantec 1909, p. 268]. Le principe de la « sélection naturelle » assure simplement que

les survivants survivent et que les autres disparaissent, ce n'est qu'une explication *a posteriori* ou une tautologie, Le Dantec retrouve là une des critiques classiques du darwinisme (*e.g.* [Schiller 1979, chap. XII]). Il écrit : «*On pourrait dire que le principe de la sélection naturelle expose que* les choses sont à chaque instant comme elles sont et non autrement*, et que cela a été vrai à un moment quelconque de l'histoire du monde. . . , c'est là tout le principe du grand évolutionniste anglais*» [Le Dantec 1909, p. 269].

Les néo-darwiniens ne sont pas mieux traités par Le Dantec. Weismann ne fait qu'exagérer encore la pensée du Maître, en attribuant à la reproduction sexuée, aux mélanges de « cellules germinales », la responsabilité principale de la variation des espèces. Faire intervenir des corpuscules invisibles qui seraient responsables séparément des caractères d'un individu, c'est de l'obscurantisme métaphysique, à moins d'assimiler l'hérédité à une infection « microbienne » et nier l'unité du vivant ; d'autant que, plus cohérent que Darwin, Weismann en déduit l'impossibilité de l'hérédité des caractères acquis, qui conduit à l'impossibilité absolue de tout transformisme. Quant à la nouvelle théorie en vogue, celle des mutations brusques et hasardeuses de Hugo de Vries [Le Dantec 1909], elle ne peut expliquer tout au plus que des variations « ornementales », sans valeurs sélectives d'aucune sorte, qui ne touchent pas aux « mécanismes de la vie » ; une telle théorie des mutations dénature le véritable transformisme philosophique lamarckien [1909]. Le Dantec considère que le hasard intervient sans discernement, sans loi, « à l'échelle inférieure », mais, selon lui, l'adaptation globale des organismes vivants à leur environnement relève d'une « Mécanique » interne que Lamarck [1809] a déjà assez bien identifiée : les conditions de vie, les habitudes prises, l'usage et le non-usage, modifient progressivement le « patrimoine chimique » que les individus transmettent à leur descendance. L'équation fondamentale de cette mécanique de la vie qui décrit le processus de complexification de Lamarck-Le Dantec est donnée plus bas, note 10.

La position de Le Dantec à l'égard du darwinisme est curieusement proche de celle de Cournot [1872, 1875] bien qu'inverse en tous points. Comme Le Dantec, Cournot s'intéresse d'abord au « phénomène de la vie » qui, selon lui, nécessite l'intervention d'une « force vitale » spécifique. Cournot considère que la sélection des variations fortuites avantageuses explique sans doute certaines adaptations simples d'une espèce à son

environnement, mais ne peut rendre compte de la complexité des organes fonctionnels finalisés d'un être vivant. Il faudrait que la nature produise inlassablement des écarts infiniment nombreux aux espèces existantes pour que la sélection au hasard des circonstances suffise à expliquer ne serait-ce que la trompe d'un éléphant (quel avantage sélectif aurait une trompe un peu plus longue qu'un nez ordinaire mais trop courte pour atteindre le sol ? Il faudrait qu'un éléphant ait vu brutalement sa trompe grandir aux dimensions actuelles pour qu'il en tire un avantage conséquent dans la lutte pour l'existence, et cela brise non seulement la théorie de la sélection graduelle mise en avant par Darwin, mais aussi l'étonnante stabilité des espèces dont la variabilité est étroitement assujettie à la fourchette réglementaire, ou bien alors il faudrait imaginer que la nature trie elle-même les éléphants à la façon d'un éleveur pour obtenir des races d'éléphants aux trompes de plus en plus longues jusqu'à ce qu'elles atteignent une taille suffisante, mais ce n'est plus alors une sélection au hasard et accrédite la thèse d'une nature intelligente que Darwin conteste par ailleurs, ou bien encore on devrait conjecturer une évolution coordonnée de la taille et du nez des éléphants et donc d'innombrables espèces intermédiaires d'ailleurs introuvables aux dires de Cuvier, etc.).

Le hasard seul ne peut expliquer la coordination des parties en vue d'un but, la vision pour un œil, l'ouïe pour une oreille, etc., de la même façon qu'il ne peut écrire l'Iliade lettre après lettre, en aveugle. Et quand bien même le hasard composerait un œil ou l'Iliade, cela lui prendrait tant de milliards de milliards de millénaires qu'il n'aurait plus le temps d'écrire l'Odyssée ni les tragédies de Racine, ou de compléter un être vivant en le dotant d'une oreille et d'un nez fonctionnels tels qu'on les lui connaît (affirmation de bon sens qui mériterait d'être infirmée ou confirmée par un calcul, facile dans le cas de l'Iliade [Borel 1914], mais peu clair dans celui de l'œil, voir *e.g.* [Kimura 1983]). Cournot demande ensuite qu'on lui explique comment les fouilles exécutées au hasard des chantiers de voies ferrées et des creusements de carrières et de mines n'ont pas réussi à mettre à jour les « intermédiaires sans nombre » qui devraient selon Darwin expliquer les espèces actuelles et n'ont fourni à l'observateur, en fait d'espèces disparues, que des restes très éloignés les uns des autres ; le hasard ne pourrait réaliser un tel tri s'il n'était déjà à l'image des faunes et des flores anciennes.

Les mécanismes imaginés par Darwin pour justifier la thèse d'une évolution des espèces sont donc insuffisants bien que la thèse elle-même soit, aux yeux de Cournot, tout à fait vraisemblable et constitue sans doute un des apports scientifiques fondamentaux du XIX^e siècle. La théorie des probabilités philosophiques que Cournot a tirée du calcul des chances permet ainsi de critiquer la théorie darwinienne de façon « vraiment scientifique »(voir à ce sujet les travaux fondamentaux de T. Martin [1996]) et d'en démontrer les faiblesses d'ailleurs évidentes pour Le Dantec. Mais, pour ce dernier, c'est parce que le hasard n'est soumis à aucune loi qu'il ne peut expliquer l'évolution des espèces, tandis que, pour Cournot, c'est précisément parce que le hasard est soumis à des lois qu'il peut contester les raisons darwiniennes et mettre à l'épreuve, ce faisant, la critique philosophique cournotienne sur un exemple intéressant. Quant aux réponses proposées par Le Dantec comme par Cournot pour rendre compte de la transformation des espèces, elles sont pour le moins aussi contestables que celles de Darwin, à qui Cournot, comme Le Dantec, reconnaît toutefois le mérite éminent d'avoir «*réuni les conditions diverses qui permettent, sinon de résoudre scientifiquement* [la question de la genèse des types organiques]*, du moins de l'attaquer méthodiquement*» [Cournot 1875, p. 98].

Il existe bien d'autres réactions françaises au darwinisme, contemporaines des travaux de Le Dantec, voir [Giard 1904], [Le Dantec 1899, 1909], [Delage, Goldsmith 1909], [Labbé 1929], [Conry 1974], etc. Les questions touchant aux mécanismes de l'évolution, fort compliquées, sont d'ailleurs assez loin d'être résolues. On se reportera par exemple au classique essai de Jacques Monod [1970] qui, pour justifier la thèse selon laquelle : «*Le hasard seul est à la source de toute nouveauté, de toute création dans la biosphère. Le hasard pur, le seul hasard, liberté absolue mais aveugle, à la racine même du prodigieux édifice de l'évolution*» et répondre à l'objection de l'improbabilité de production au hasard d'un organisme vivant un tant soit peu complexe, reprend à son compte l'un des plus célèbres paralogismes de d'Alembert : «*La probabilité a priori que se produise un événement particulier parmi tous les événements possibles dans l'Univers est voisine de zéro. Cependant l'Univers existe. Il faut bien que des événements particuliers s'y produisent, dont la probabilité (avant l'événement) était infime*» [Monod 1970, p. 184]. Borel, Le Dantec

et Cournot auraient souri d'une telle candeur. Toutefois Le Dantec aurait peut-être approuvé l'extrait suivant du même ouvrage dans lequel Monod traite de l'Évolution [1970, chap. 7, p. 162-163] : «*La théorie sélective a été trop souvent comprise ou présentée comme faisant appel aux seules conditions du* milieu extérieur *comme agents de sélection. C'est là une conception tout à fait erronée. Car les conditions externes ne sont en aucun cas indépendantes des performances téléonomiques caractéristiques de l'espèce... Il est évident que la part des performances téléonomiques dans l'orientation de la sélection devient de plus en plus grande à mesure que s'élève le niveau d'organisation donc d'*autonomie *de l'organisme à l'égard du milieu. Et cela au point qu'on peut sans doute considérer cette part comme décisive chez les organismes supérieurs, dont la survie et la reproduction dépendent avant tout de leur comportement.*»

Sur les théories probabilistes modernes de l'évolution moléculaire et pour une discussion fine du dossier de l'évolution, on consultera l'ouvrage de synthèse de Kimura [1983]. Pour un éclairage actuel de la théorie de l'évolution, on verra [Devillers, Chaline 1989] qui propose une explication alternative du cou de la girafe de Lamarck et donc de la trompe de l'éléphant de Cournot. Sur les emplois du « hasard » dans la biologie de la fin du XIX^{e} siècle, on consultera la belle thèse de Charles Lenay [1989]. Voir aussi [Gayon 1992], [Pichot 1993], etc., la littérature sur ces sujets est très riche et trop abondante pour être citée toute.

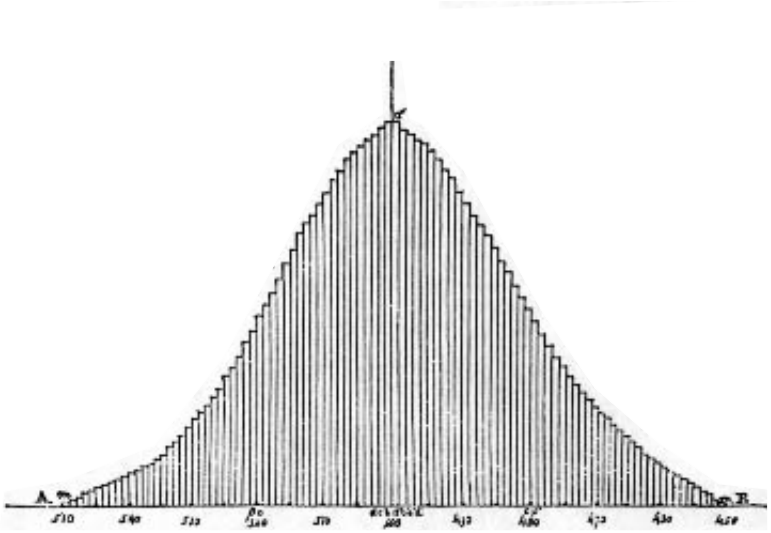
4. On se contente souvent d'affirmer à ce propos, comme à celui du jeu de Saint-Pétersbourg, que, l'espérance d'attente d'un retour à l'équilibre étant infinie, tous les calculs possibles conduisent à des résultats paradoxaux, *e.g.* [Richard-Foy 1910]. Borel cherche plus loin et après lui par exemple [Feller 1950/1968, p. 314 et chap. 3].

5. On lira avec intérêt la polémique Jules Tannery-Le Dantec sur la conscience-épiphénomène dans la *Revue du mois* [Tannery 1906], [Le Dantec 1906]. On comprendra mieux ainsi que Borel se soit élevé contre la biophilosophie de Le Dantec qui ne laisse plus rien à l'Homme, pas même le calcul des probabilités. Borel a publié toutefois deux livres de Le Dantec et plusieurs de ses articles ou chroniques notamment sa polémique avec Bergson en 1907 qui allait dans le (bon) sens borélien, mais Le Dantec était difficilement incorporable au système de Borel ou à tout autre système que le sien propre. Après 1911, Le Dantec ne publiera plus dans la collection

de Borel chez Alcan ni dans la *Revue du mois*. Celle-ci fera cependant une excellente critique d'un de ses derniers ouvrages [Le Dantec 1913].

Signalons que les lettres de Le Dantec à Borel qui s'échelonnent de la fin de novembre 1905 à décembre 1911 et qui abordent divers points importants de la polémique présentée ici, sont maintenant accessibles aux Archives de l'Académie des Sciences, Fonds Borel, M 176 à 178, RM 185 à 187. Nous ignorons où se trouvent les réponses de Borel et la correspondance générale de Le Dantec qui mériterait certainement d'être étudiée.

6. La représentation graphique des phénomènes temporels est devenue alors habituelle dans les sciences expérimentales, notamment depuis la mise en œuvre des enregistreurs graphiques de Jules Marey (1830–1904), voir *e.g.* [Braun 1992], de sorte que les raisonnements sur les « trajectoires » du jeu de pile ou face viendraient, en partie, de l'enregistrement des processus biologiques par les physiologistes de la fin du XIX^{e} siècle et du bon sens de Félix Le Dantec. On notera que ni Bertrand, ni Poincaré, ni Borel en 1909, ne dessinent la courbe de Le Dantec, ce qui pourrait donner du poids à l'hypothèse hasardée ici. Les « courbes de possibilité » puis les courbes de fréquences ont été utilisées en calcul des probabilités longtemps auparavant, notamment par Laplace, Cournot et Quetelet, mais il s'agit de modes de représentation des probabilités ou des fréquences des divers résultats possibles tout à fait étrangers aux courbes de Le Dantec, et même antagonistes. Darwin contre Lamarck : portraits de groupes chez Quetelet, portraits individuels chez Le Dantec. Les courbes de Quetelet, empiriques ou théoriques, celle dessinée ci-dessous par exemple, représentent des ensembles de n parties de pile ou face simultanées ou sans idée d'ordre temporel, elles manifestent ainsi les lois du hasard des mathématiciens telles que le théorème de Bernoulli (loi faible des grands nombres), le théorème de Moivre ou même, si l'on imagine que n tend vers l'infini, les théorèmes presque sûrs qui décrivent la convergence de la répartition empirique vers la loi théorique. La courbe de Le Dantec qui s'attache, pour sa part, à l'histoire individuelle d'une seule partie de pile ou face prolongée longtemps, met en évidence d'autres lois du hasard des mathématiciens (comme du hasard de Le Dantec, bien qu'il s'en défende), la loi forte des grands nombres de Borel, la loi de récurrence de Le Dantec, celle des retours à l'origine, etc., que la courbe de Quetelet ne permet pas d'isoler,



Courbe de Quetelet [1846, p. 103] *pour le jeu de pile ou face,* [Stigler 1986, p. 209]. *Répartition des nombres de boules blanches observées au cours d'un tirage de* 999 *boules « à la fois » dans une urne contenant en nombre égal et infini des boules blanches et noires.*

elle qui noie les histoires particulières dans la masse et les empêche de s'exprimer dans la longue durée.

En revanche, on trouve dans la littérature financière, physique, biologique, statistique, . . . , en nombre croissant tout au long du XIX^e^ siècle, et chez Quetelet en particulier (voir [Droesbeke, Tassi 1990]), des courbes de Le Dantec empiriques, représentant l'évolution d'une quantité au cours du temps. C'est d'ailleurs le but des enregistreurs de Marey, que Le Dantec connaît bien et qu'il semble avoir adaptés au jeu (mathématique) de pile ou face. Voici une de ces idées naturelles, évidentes après coup, mais qui changent tout : la preuve en est, Le Dantec démontre la propriété de récurrence mieux qu'Ampère, Laplace et Borel réunis, simplement en regardant sa courbe. De la même façon, la thèse de Bachelier [1900] tire sa principale originalité de la considération des courbes des cours de bourse ; pour lui, elles représentent les gains d'un joueur qui jouerait à un jeu de pile ou face continu dans le temps. Elles deviennent ainsi des courbes de

Le Dantec (avant la lettre) tracées sur un papier au quadrillage infiniment fin, et toutes les formules du jeu de pile ou face classique trouvent alors des analogues continus très simples, d'ailleurs plus simples que celles dont elles proviennent. Voir aussi les notes 8 et 9.

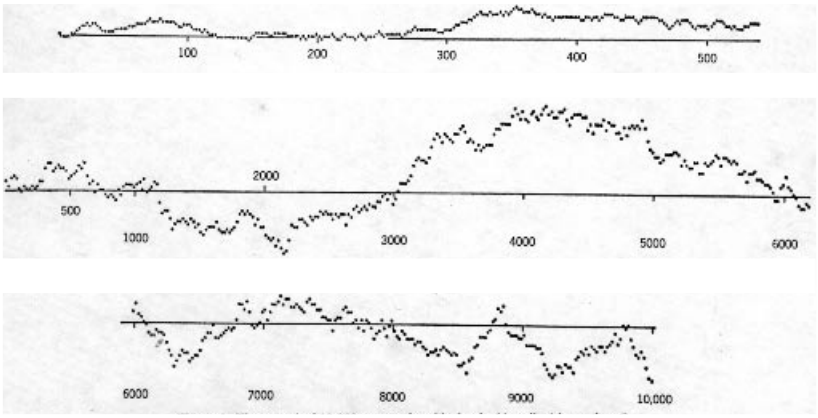
7. La femme de Borel, la romancière Camille Marbo, en connaît les finesses. C'est elle, de notoriété publique, qui rédigea pour lui certaines de ses plus habiles réponses à Lebesgue, au plus fort de leurs déchirements [Borel 1919], [Lebesgue 1991].

8. Cette précision, que Borel n'a pas estimé utile d'apporter, permet de mesurer rétrospectivement l'originalité de sa méthode. William Feller (1906–1970), l'un des grands représentants de la théorie moderne des probabilités, dont le « tome I » [Feller 1950/1968] est généralement considéré, et à juste raison, comme un sommet de la littérature probabiliste du XX^{e} siècle, a refondu intégralement le chapitre III de la troisième édition de 1968, à partir d'un *main lemma* dont il nous dit en note que sa signification pour l'étude des fluctuations du jeu de pile ou face est (en 1968) « récente ». Or ce *main lemma* est précisément l'égalité de Borel de 1911–1914 :

$$P\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0\} = \frac{E(|S_{2n}|)}{2n} = P\{S_{2n} = 0\} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

La démonstration du *main lemma* de Feller est plutôt moins élégante que celle que nous venons de présenter d'après Borel, mais c'est affaire de goût. De ce *main lemma* résulte notamment la loi arc sinus pour le jeu de pile ou face, que Bachelier [1915, 1925] avait déjà assez bien calculée dans le cas des cours de la rente, en raisonnant comme Borel sur la courbe de Le Dantec vue de loin. Louis Bachelier s'est d'ailleurs très vraisemblablement inspiré de la polémique Borel-Le Dantec sur les périodicités paradoxales du jeu de pile ou face, publiée en 1914 dans *Le Hasard*, ce qui prouverait que ce livre unique et si peu lu a eu au moins un lecteur. Rappelons que la loi arc sinus a été démontrée pour le mouvement brownien par Lévy [1939] et directement pour le jeu de pile ou face par Chung et Feller [1949]. Voir [Feller 1950/1968] pour d'autres références.

Feller qui, selon certaines sources, n'était pas loin de penser de Borel ce que Borel devait penser de Le Dantec, aurait peut-être tiré profit lui aussi d'une lecture plus attentive du *Hasard*. Notons toutefois que, sans



Courbe de Feller [1950/1968, p. 87]. *Simulation par ordinateur de* 10 000 *parties de pile ou face. La première courbe représente les* 550 *premières parties, les deux lignes suivantes représentent les* 10 000 *parties, l'échelle horizontale étant réduite au* $\frac{1}{10}$*-ième, sans changement de l'échelle verticale.*

le savoir, Feller reproduit dans son tome I la courbe sinueuse de Monsieur Le Dantec et la commente de façon toute borélienne [Feller 1950/1968, p. 87]. Nous conseillons vivement au lecteur débutant (s'il s'en trouve), qui souhaiterait comprendre pourquoi la loi arc sinus a cette curieuse forme en U, de se reporter aux pages 46–53 du *Hasard*.

9. Le beau-frère de Borel, Jacques Duclaux (1877–1978), professeur de biologie générale au Collège de France, s'est livré à d'intéressantes expérimentations sur le jeu de pile ou face. Dans un de ses livres de vulgarisation [1959], il trace une courbe sinueuse de Le Dantec longue de 10 240 coups, dont il affirme qu'il l'a obtenue en six semaines à raison d'une heure par jour. Jacques Duclaux bat ainsi d'une courte tête le record établi par le statisticien sud-africain John Kerrich qui utilisa les loisirs d'une longue captivité au Danemark pendant la guerre pour se livrer à des expérimentations probabilistes. Ses résultats sont analysés dans un livre paru à Copenhague en 1946 auquel on se reportera ; Kerrich

Courbe de Duclaux [1959, p. 75] (10 240 *parties de pile ou face*). *Décidément, un joueur qui souhaiterait faire fortune grâce à la martingale* « sortir du jeu au premier gain après un retour à l'équilibre et recommencer indéfiniment » *devra s'armer de patience et ne pas craindre les découverts bancaires.*

analyse 10 000 lancers d'une pièce et 5 000 tirages d'une urne contenant deux boules rouges et deux boules vertes. Feller [1968, p. 87] utilise, pour sa part, une simulation par ordinateur de 10 000 parties de pile ou face (voir note précédente). On connaît les expériences de Buffon que nous rappelons plus loin note 17, peut-être aussi celles de Quetelet (note 5), Westergaard et Weldon, [Hald 1998], [Stigler 1999], on connaît moins en France les relevés de la loterie génoise de Prague et Brno analysés sur 133 ans par Czuber [1889, 1902], etc. ; mais aucun de ces savants ne trace la courbe sinueuse du jeu de pile ou face, qui paraît revenir à Le Dantec (sauf à la lui contester).

10. Si l'on en croit la *Tribune de Lausanne* du 16 juin 1917 : « *Le Dantec fut un des hommes les plus représentatifs de l'athéisme et du matérialisme contemporains, un opiniâtre de la négation, un apôtre du néant...* », mais il fut aussi un mathématicien prophétique sans le savoir et d'après ses proches un être sensible, un ami attentif, qui supporta stoïquement les souffrances d'une maladie cruelle dont il mourut le 6 juin 1917. Le Dantec avait fait de longs séjours au Sanatorium Mangini d'Hauteville en Bugey ; il y a écrit notamment *Le Conflit* [Le Dantec 1901], qui connut plusieurs éditions. Engagé volontaire dans les Services de santé de l'Armée pendant

la guerre, il ne supporta pas les fatigues de son combat pour les « droits sacrés » de la personne humaine bafoués par la barbarie austro-allemande [Le Dantec 1917b]. (Rappelons que le botaniste Noël Bernard (1874–1911) est également mort de la tuberculose, voir par exemple [Lebesgue 1991].)

Le Dantec attribuait sans hésiter aux pucerons la conscience d'eux-mêmes et considérait la pensée comme une propriété de la « matière brute », devançant les thèses les plus extrêmes des cognitivistes actuels, pour cela seulement il mériterait qu'on s'en souvînt.

Si l'on souhaite des précisions sur la vie et l'œuvre de Félix Le Dantec, on pourra consulter [Moreau 1917], [Pérez 1917], [Lenoir 1919], [Sageret 1924], [Reinach 1926] ou [Bonnet 1930]. C'est également Charles Pérez (1873–1952), normalien de la promotion 1894 et l'un des intimes de Le Dantec (de Lebesgue et de Noël Bernard dont il est camarade de promotion), membre de l'Académie des sciences, professeur à la Faculté des sciences de Paris, qui a rédigé sa notice nécrologique dans l'annuaire de l'École normale supérieure de 1918, auquel on se reportera.

Il ne semble pas exister d'ouvrage récent sur l'œuvre philosophique et scientifique de Le Dantec. Indiquons simplement que toute la « philosophie biologique » de Le Dantec se résume en une loi d'évolution du type $A_{n+1} = A_n + A_n \cdot B_n$, où A_n désigne l'état d'un individu au temps n et B_n l'action du milieu au même temps, de sorte que, pour Le Dantec [1909, p. 37] : « *il est évident que A_n, c'est-à-dire le corps de l'individu, à un moment donné, n'était pas prévu dans l'œuf, mais est le résultat d'une évolution, d'une histoire… On peut dire : Un individu, c'est une histoire.* » La même équation régit aussi bien l'évolution des espèces et donne forme à la « loi biogénétique fondamentale » selon laquelle ontogénie et phylogénie sont à l'image l'une de l'autre (le développement d'un individu de l'embryon à l'age adulte reproduit le développement de l'espèce ; notons que cette même loi fondamentale attribuée à divers auteurs est considérée par Dedebant et Machado comme une métaphore biologique du principe ergodique de la mécanique [Dedebant, Machado, 1963]). L'équation de Le Dantec s'applique notamment au patrimoine génétique d'un individu (ou d'une espèce), réduisant l'hérédité fixe mendélienne à la portion congrue (les caractères mendéliens précisent la forme ou la couleur mais ne touchent pas aux mécanismes vitaux : les petits pois mendéliens sont lisses ou ridés certes mais leur patrimoine héréditaire évolue avec le temps suiv-

ant les lois de Le Dantec et de Lamarck), ce qui du même coup achève de marginaliser le transformisme extrême de Le Dantec en ce début du siècle du « génome », fixe, indépendant du milieu et souverain. Pour Le Dantec, il est assez clair que son équation d'évolution est aléatoire, l'action du milieu sur l'individu n'étant soumise à aucune loi, de sorte que, sans le vouloir, Le Dantec anticipe également les schémas stochastiques non héréditaires de Bernstein, von Mises et Hostinsky et qu'il est ainsi, malgré lui, un pionnier des études markoviennes dont il aurait sûrement pensé le plus grand mal.

Sur le front philosophique, Sageret [1924] et surtout Le Dantec [1907a] lui-même laissent entendre que Bergson ne fait que « poétiser », à l'usage des dames et des métaphysiciens, la philosophie biomathématique de Le Dantec dans l'*Évolution créatrice* [Bergson 1907a] ; la polémique qui s'en est suivi dans la revue de Borel est assez étonnante (voir [Bergson 1907b] et [Callens 1997]). On pourrait aussi relire *Jean Barois* pour s'imprégner de l'air de ce temps-là. Barois est en effet un disciple affirmé de Le Dantec, qui est d'ailleurs cité dans la leçon sur le transformisme prononcée par le héros devant le directeur du Collège Venceslas : le transformisme lamarckien revu par Le Dantec est « la vérité scientifique définitive », opposée au relativisme perfide des bons pères. Et la mort de Luce est une anticipation troublante de la mort de Le Dantec [Martin du Gard 1913] : «*Le dernier acte est sanglant quelque belle que soit la comédie en tout le reste.* »

11. Indiquons toutefois que Borel est, au témoignage de L.J. Savage, qui sait de quoi il parle, le premier à avoir proposé une défense des « probabilités personnelles » dans sa critique du traité de Keynes [1921] (voir [Borel 1924]), et l'on imagine assez que les probabilités personnelles de Borel sont liées d'une façon ou d'une autre à ses réflexions sur le hasard personnel de Le Dantec qui, dans cette hypothèse, deviendrait également, sans l'avoir voulu, l'un des pionniers des théories subjectives modernes.

12. Jean Ville, professeur au Lycée de Nantes, est mobilisé dans l'Artillerie. Fait prisonnier en juin 1940, il est incarcéré à l'Oflag XVIIA d'Edelbach, en Autriche, jusqu'à l'automne 1941. Il assure pendant un an le cours de probabilité et, en collaboration avec Frédéric Roger, celui de Calcul différentiel et intégral au « Centre d'études » de l'Oflag dirigé par Jean Leray (1906–1998), l'un des grands mathématiciens français de ce

siècle [Leray 2000]. Le Centre d'études d'Edelbach est sans doute la plus célèbre des universités de captivité de la seconde guerre mondiale, qui soutient aisément la comparaison avec bien des universités françaises du moment et dont l'histoire ne semble pas faite. Deux futurs académiciens, professeurs au Collège de France, y enseignèrent pendant cinq ans, Leray en mathématiques et Étienne Wolff en sciences naturelles, qui tous deux y firent de belles découvertes (Archives nationales AJ/16/5826).

Libéré à la rentrée 1941, Ville reprend d'abord son poste à Nantes ; il est titulaire du cours Peccot du Collège de France en 1942, où il enseigne la théorie de la corrélation statistique [Ville 1955, p. 10]. Il rejoint bientôt l'Université de Poitiers et, en 1943, celle de Lyon. Frédéric Roger, un brillant élève de Fréchet et Denjoy, est libéré et affecté à l'Académie de Berlin puis dans une université allemande, avec Christian Pauc (ce qui leur valut bien des déboires à la Libération, Archives Fréchet carton 11). Ville et Roger furent remplacés au Centre d'Edelbach par Camille Lebossé (1905–1995) et Corentin Hémery (1909–1992), tous deux anciens élèves de l'École normale supérieure de Saint-Cloud et professeurs de mathématiques au Lycée Pasteur qui ont formé, par leurs ouvrages édités par Fernand Nathan, des générations entières de lycéens de la sixième à la terminale jusqu'à ce que les « mathématiques modernes » ne viennent, pour un temps, les contester (il n'est pas impossible que l'hostilité connue de Leray à l'introduction du modernisme dans l'enseignement mathématique des lycées et collèges vienne en partie de sa longue fréquentation de Lebossé et Hémery à Edelbach). L'Oflag d'Edelbach est également connu pour le nombre et la longueur des tunnels creusés en vue d'évasions collectives, on y assista notamment à la « grande évasion » de 143 prisonniers en une seule fois, mais nous sortons de notre sujet.

Ville paraît alors s'être désintéressé de la théorie des martingales, peut-être après avoir lu le premier article de Doob [1940] sur ce sujet qui semble clore magistralement et définitivement une théorie qu'il a si brillamment initiée, sans doute aussi parce que les applications qu'il a en vue sont relatives à la géométrie du mouvement brownien vectoriel dont Paul Lévy se préoccupe dans le même temps, sans qu'il en ait eu connaissance. Lorsque, revenu de captivité, Ville publie à ce sujet une première note [Ville 1942], Fréchet, sans doute alerté par Lévy avec lequel il correspond très régulièrement, lui indique l'article de Lévy [1940] de

l'*American Journal of Mathematics* et Ville reconnaît très lucidement dans une lettre à Fréchet datée du 4 mai 1943 (carton 5 des archives Fréchet de l'Académie des sciences) qu'il s'est attaqué sans le savoir aux mêmes problèmes que Lévy et que, ce dernier l'ayant devancé sur plusieurs points importants, il retire son propre travail (ce qui est certainement dommage ; dans sa note de juillet 1942, Ville démontre, par une méthode de martingales, qu'un mouvement brownien à trois dimensions partant de zéro n'y retourne presque sûrement pas et donc que les points doubles forment sur l'axe des temps un ensemble de mesure nulle, il pose la même question pour le cas du plan, suggérant que la réponse est positive, ce qu'avait montré, à sa manière et indépendamment, Lévy [1940] et [1948, p. 257]).

On peut d'ailleurs noter que Lévy a toujours adopté à l'égard de Ville une attitude très réservée ; il soutient dans une lettre à Fréchet que Ville n'a jamais été qu'un élève sans grande originalité, (sur toutes ces questions on se reportera à la très intéressante thèse que soutiendra Bernard Locker en 2000), ce en quoi il se trompe, comme d'ailleurs dans la plupart de ses jugements scientifiques portant sur les travaux des mathématiciens de son temps qu'il ne lit que très peu et assez mal, il le reconnaît lui-même d'ailleurs très volontiers [Lévy 1970]. On peut aussi bien imaginer mille autres raisons pour l'abandon par Ville de la théorie des martingales, l'une des plus prometteuses du demi-siècle suivant : les conditions de vie et de travail sous l'Occupation, d'autres intérêts privés ou publics dont nous ne savons rien ou presque.

13. En 1947, à la suite d'un différend académique, Ville a quitté l'Université de Lyon (où il a été remplacé par Max Eger) pour une position d'ingénieur de recherche à l'Alsacienne de Construction Mécanique (qui deviendra Alcatel) ; il s'intéresse alors à la transmission de l'information en télécommunications ; son exposé au Colloque de Lyon présente quelques-uns de ses résultats, tous très éloignés des idées de sa thèse [Ville 1948, 1949]. Ville, en froid avec les universitaires lyonnais, ne semble d'ailleurs pas avoir pris une part active au Colloque où il était invité de longue date. Selon Fréchet [Lyon 1949, p. 47], toutes les conférences prévues, et donc celle de Ville, ont été effectivement prononcées, mais il est possible que ce dernier n'ait été présent physiquement que le jour de son exposé et qu'il n'ait pas assisté à la conférence de Doob (on note que seul C.R. Rao, qui

assiste au Colloque, [Lyon 1949, p. 26], sans présenter de communication, s'est risqué à intervenir après l'exposé de Doob). Il semble en tout cas établi que Ville et Doob ne se sont pas rencontrés à Lyon (communication personnelle de Ville à P. Crépel [1984b]). Doob pour sa part ne se souvient pas avoir jamais rencontré Ville, ni à Lyon ni ailleurs (communication personnelle de Doob à K.L. Chung). Toutefois, Ville ou Fréchet auraient pu reparler avec Borel de ces questions d'avant la Débâcle, à l'occasion de la publication des actes. Nous manquons à ce sujet d'éléments positifs et nous n'en dirons pas plus.

Jean Ville est nommé en 1956 professeur d'économétrie à la Faculté des sciences de Paris où il termine sa carrière tout en poursuivant ses activités de conseil scientifique chez Alcatel. Sur l'engagement des mathématiciens français dans l'industrie des télécommunications après la seconde guerre mondiale, on consultera la thèse, brillante, de J. Segal [1998].

14. Dans une lettre datée du 6 avril 1999 qui constitue une première esquisse de cet article, l'un d'entre nous (K.L. Chung) conclut : «*Tout le monde, from d'Alembert, Buffon,* ..., *onward to Bertrand, Poincaré, Czuber, Coolidge* (*Doob's teacher in Harvard who wrote a textbook on probability in which he discusses Petersburg at length*). *All these people considered limiting the number of bets to a fixed n.* BUT PERSONNE *never thought of conjecturing* (*) *!!! They computed all kinds of probabilities under various conditions of limiting the number* REALISTICALLY, *but never had the audacity of testing a few cases of* (*). (*Did I not send to you a computer printout for n up to* 10 *?*) *This is* most curious *and worthy of a* HISTORICAL ÉNONCÉ. *For martingale it is a great watershed, missed by Ville and Doob !*» Dans une autre lettre écrite un peu avant, le même remarque : «*As far as I recall, nobody ever tried to compute the expectations for a stopped game. The reason is obvious : nobody converted the Petersburg game into a martingale as Borel did* (1938/9). *For this reason it is better to take up a simpler game : that of equitable coin-tossing... If return to* 0 *is certain, then after each return there is* $\frac{1}{2}$ *probability of winning* 1 (*sou*), *and therefore by Borel's lemma (no need of Cantelli) it is certain that the gambler will win 1. Many words were wasted on how long it takes and how much he can suffer to lose* (*before win !*). *Tout le monde talked this kind of rot. Nobody thought of computing* $E(X(\min(T, n)))$ *! Nor did Borel himself for this* « *game*». *His*

Petersburg martingale is unfortunately too complicated, for perhaps people like Dantec, and "before its time" for Buffon et al. »

15. Borel ira plus loin encore dans son dernier « Que sais-je ? » de 1953, *Les nombres premiers*, dans lequel il entreprend de montrer comment le calcul des probabilités permet dans certains cas de réduire en certitudes les conjectures les plus profondes sur les « mystères redoutables et sacrés des nombres », utopie romantique présente chez Borel de longue date [Borel 1929, 1952], que personne ne dut prendre au sérieux mais qui permet d'approcher le fond de l'entreprise vulgarisatrice borélienne. La théorie analytique de Hermite, la théorie algébrique de Hilbert et leurs émules, pour fascinantes qu'elles soient, ne sont accessibles qu'à de minuscules cénacles alors que la contemplation des nombres est et doit être un élément essentiel de la culture de l'Humanité. Le calcul des probabilités permet l'impossible vulgarisation de la science la plus haute, celle des nombres, encore faut-il qu'on le débarrasse des paradoxes et des illusions dont des siècles d'ignorance l'ont accablé, faute d'avoir cru suffisamment en l'universalité de la raison humaine. Sur ce point comme sur d'autres Borel ne fut guère entendu de ses contemporains puisque son « Que sais-je ? » sur les nombres premiers sera réécrit en langage algébrique de stricte obédience quelques années plus tard [Itard 1969]. Ajoutons que la dernière version du même « Que sais-je ? » ([Mendès-France, Tenenbaum 1997]) est un peu moins éloigné des idées boréliennes, qui ont pour elles d'être virtuellement intemporelles bien qu'il soit devenu difficile de se procurer l'un ou l'autre des ouvrages où elles sont exposées ; les « Que sais-je ? » boréliens notamment sont introuvables.

16. On comprend aisément pourquoi Borel ne fait aucune allusion précise aux diverses « lois des grands nombres » empiriques et théoriques proposées par les savants pour tenter de clarifier le paradoxe de Saint-Pétersbourg, depuis Buffon et Condorcet jusqu'à Feller. Il s'agit d'étudier le comportement asymptotique probable des gains moyens de Pierre au jeu de Pétersbourg recommencé indéfiniment après chaque succès. Buffon [1777] fait jouer à « un enfant » (dont il ne nous dit rien) 2 048 parties de Pétersbourg pour un gain total de 10 057 écus, soit une moyenne de cinq écus par partie, enjeu envisageable pour résoudre le paradoxe (Augustus de Morgan a fait refaire la même expérience par plusieurs amis, [Morgan 1872], voir à ce sujet [Stigler 1999], [Jorland 1986] et [Dutka 1988] qui

pour sa part fait jouer 22 528 fois un ordinateur au jeu dont il s'agit, pour une moyenne de 7,34 dollars). De telles moyennes toutefois s'avèrent décevantes, à la fois mathématiquement et pratiquement, surtout pour Paul qui peut subir brutalement une perte énorme sans contrepartie immédiate, le jeu de Pétersbourg s'apparentant pour lui davantage à une roulette russe qu'à un jeu équitable (toujours l'amplitude exagérée des écarts !). La première « loi faible des grands nombres » relative aux variables de Pétersbourg (d'espérances infinies) paraît due à Feller [1937, 1950/1968] qui a montré que la somme des gains $S(n)$ de Pierre au cours de n parties de Pétersbourg est équivalente en probabilité à $n \log_2 n$, mais ce type de résultat convenablement précisé [Martin-Löf 1985] ne règle pas le fond du problème pratique et théorique, Pierre conservant un avantage asymptotique conséquent sur Paul puisque l'on a

$$\mathrm{e}^{-1} \leq \liminf \frac{S(n)}{n \log_2 n} \leq \limsup \frac{S(n)}{n \log_2 n} = \infty \quad \text{p.s.},$$

[Aaronson 1978], de sorte qu'il n'y a pas lieu d'espérer quoique ce soit d'une loi forte des grands nombres [Chow, Robbins 1961].

Il est d'ailleurs très probable que Borel ignorait les résultats de Feller et des probabilistes mathématiciens modernes qu'il ne cite jamais en aucun endroit. Et quand bien même en eût-il pris connaissance, il ne les aurait certainement pas mobilisés pour résoudre le paradoxe dont il s'agit ; ce dernier résultant de la prise en considération abstraite de l'infini actuel ou virtuel, il n'eût pas été convenable de le résoudre en utilisant les vertus de ce même infini des mathématiciens, même si, par extraordinaire, elles avaient fourni une solution raisonnable du paradoxe de Saint-Pétersbourg, ce qui du reste n'est pas précisément le cas.

17. Ce pourrait même être une des motivations possibles du lemme de Borel sur les « probabilités dénombrables » ([Borel 1909a], écrit en 1908, voir à ce sujet [Lebesgue 1991]) : Si $(A(n))$ est une suite d'événements indépendants de probabilités respectives $p(n)$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une infinité (et donc l'un au moins) de ces événements se réalisent avec probabilité unité est que la série de terme général $p(n)$ diverge (voir *e.g.* [Feller 1950/1968, chap. 8]). À titre d'illustration, on peut appliquer ce résultat à la martingale de Borel de 1908. Supposons démontré que la courbe de Le Dantec repasse par zéro avec probabilité

un (voir ci-dessous), après un tel retour à l'équilibre le jeu se renouvelle à l'identique et indépendamment du passé, il est donc (presque) certain de retourner une seconde fois à l'équilibre et ainsi de suite : il y a presque sûrement une infinité de périodes comprises entre deux zéros et elles sont indépendantes les unes des autres. Mais comme il y a une chance sur deux qu'une excursion entre deux retours à l'équilibre commence par pile, on est dans un cas d'application du lemme de Borel avec $p(n) = \frac{1}{2}$, et par conséquent une infinité (et donc au moins une) de ces séquences commencent par pile avec probabilité un (voir note 14). On aura noté la rapidité de cette dernière déduction ; lorsqu'on peut l'appliquer, le lemme de Borel est remarquablement efficace. Ce n'est qu'en 1936 que de telles applications seront faites à l'étude des chaînes de Markov à états dénombrables, indépendamment par Kolmogorov et Doeblin qui en déduiront des théorèmes parfois plus puissants que ceux obtenus par la théorie spectrale des opérateurs !

Si donc on imagine que c'est en réagissant aux écrits de Le Dantec [1907b,c] que Borel s'est lancé dans « l'étude approfondie du jeu de pile ou face » et a « vu » son lemme des probabilités dénombrables, le chargé du cours de biologie à la Sorbonne serait le responsable direct du lemme de Borel et, par conséquent, de la loi forte des grands nombres et, par suite, des probabilités dénombrables et, donc, de la théorie moderne des probabilités, de sorte qu'il aurait contribué de la façon la plus déterminée possible à développer une théorie tout entière fondée sur une conception, la probabilité d'un événement, qui ne rime à rien (mais qui a joué dans la science du XX^{e} siècle un des tout premiers rôles).

Pour se persuader que la courbe de Le Dantec revient en zéro avec probabilité un, on peut évidemment évoquer le principe de Le Dantec rappelé ci-dessus : « le hasard ne connaît aucune loi », d'où il suit que la courbe ne saurait demeurer indéfiniment d'un même côté de l'horizontale. Si elle est d'abord négative, il faudra bien qu'elle remonte jusqu'à être positive ; la malchance est un état transitoire, il suffit d'attendre. Toutefois cet argument présente l'inconvénient de négliger les cas où toute attente est vaine, par exemple lorsque l'un des jouers, mettons Paul, gagne sans arrêt ou presque, empêchant Pierre de jamais revenir à l'équilibre. C'est d'ailleurs l'un des points soulignés par Borel, le principe de Le Dantec implique des retours nécessaires à l'origine alors qu'ils ne sont pas presque

sûrs dans le cadre du calcul des probabilités classique où se place Borel. L'axiomatique implicite de Le Dantec est celle des suites de parties (les collectifs de Le Dantec) qui ne connaissent aucune loi, celle de Borel est ensembliste et les cas de non retours à l'équilibre sont de probabilité nulle.

En restant dans le cadre borélien (explicité par Kolmogorov en 1933), il est très facile de montrer que les retours à l'origine sont de probabilité un. On peut utiliser par exemple la classique méthode des doublements successifs d'Adelman qui montre du même coup qu'avec probabilité un, un retour à l'équilibre sera suivi d'un gain pour Pierre. En effet, le théorème de Moivre ($S(n)$ est asymptotiquement de loi normale centrée de variance n) impose à la courbe de Le Dantec de sortir de toute bande horizontale fixée à l'avance aussi large soit-elle. Il suffit alors de raisonner ainsi : la courbe part de zéro, elle sort nécessairement (en l'occurrence dès le premier coup) de la bande horizontale d'ordonnées $[-1, +1]$, et elle a une chance sur deux de sortir par le haut et donc d'atteindre un venant de zéro. Supposons qu'elle ne le fasse pas et qu'elle sorte par le bas, elle a alors une chance sur deux de sortir par le haut de la bande $[-3, +1]$, de largeur 4, au milieu de laquelle elle se trouve, et donc de couper l'axe des x et de monter en un. Supposons cependant qu'elle sorte encore par le bas, elle a heureusement de nouveau une chance sur deux de sortir par le haut de la bande convenablement doublée $[-7, +1]$, et donc de couper l'axe des x et de monter en un, et ainsi de suite, elle ne peut continuer à sortir systématiquement par le bas des bandes horizontales $[-(2^n-1), +1]$, par conséquent, avec probabilité un, elle finit par sortir par le haut et couper l'axe horizontal et monter en un. On peut également s'assurer de ce résultat en suivant d'autres méthodes plus classiques encore, par exemple celles données par Feller [1950, chap. 3 et 13] ou par Borel, Bertrand, etc.

BIBLIOGRAPHIE

Aaronson (Jon)

[1978] Sur le jeu de Saint-Pétersbourg, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris*, 286 (1978) A, p. 839–842.

Ampère (André Marie)

[1802] *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*, Lyon : Frères Périsse, 1802.

André (Désiré)

[1887] Solution directe d'un problème résolu par M. Bertrand, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 105 (1887), p. 436–437.

Bachelier (Louis)

[1900] Théorie de la spéculation, thèse sciences mathématiques Paris, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 17 (1900), p. 21–86 ; réimpression Paris : Jacques Gabay, 1995.

[1915] La périodicité du hasard, *L'Enseignement mathématique*, (1915), p. 5–11.

[1925] Quelques curiosités paradoxales du calcul des probabilités, *Revue de métaphysique et de morale*, 32 (1925), p. 311–320.

Barbier (Émile)

[1887] Généralisation d'un problème résolu par M.J. Bertrand, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 105 (1887), p. 407–409.

Bateson (William)

[1902] *A Defence of Mendel's Principles of Heredity*, Cambridge : Cambridge University Press, 1902.

Bergson (Henri)

[1907a] *L'Évolution créatrice*, Paris : Alcan, 1907.

[1907b] L'Évolution créatrice, lettre au directeur, *Revue du mois*, 4 (1907), p. 351–354.

Bernoulli (Daniel)

[*Werke*] *Die Werke von Daniel Bernoulli*, 4 vol. parus, Basel : Birkhäuser Verlag 1982–1996.

[1738] Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae*, 5 (1730–1731), p. 175–192 ; *Werke* 2, p. 223–234. Traduction française par R. Chareton, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 6 (1985), p. 61–77.

Bernstein (Serge)

[1926] Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, *Mathematische Annalen*, 97 (1926), p. 1–59.

Bertrand (Joseph)

[1887a] Solution d'un problème, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 105 (1887), p. 369.

[1887b] Observations à propos de diverses notes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 105 (1887), p. 437–439.

[1887c] Sur un paradoxe analogue au problème de Saint-Pétersbourg, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 105 (1887), p. 831–833.

[1888] *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1888 ; 2^{e} éd. conforme à la première, *ibid.*, 1907 ; rééd. New York : Chelsea, 1972, réimpression Paris : Jacques Gabay, 1997.

Boll (Marcel)

[1941] Les certitudes du hasard, coll. Que sais-je ? 3, Paris : PUF, 1941.

BONNET (Georges)

[1930] *La morale de Félix Le Dantec*, thèse secondaire pour l'obtention du Doctorat d'État (mention philosophie), Faculté des Lettres de l'Université de Paris, Poitiers : L'Union, 1930.

BOREL (Émile)

[*Œuvres*] *Œuvres d'Émile Borel*, 4 vol., Paris : CNRS, 1972.

[1894] *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, thèse sciences mathématiques, Paris : Gauthier-Villars, 1894.

[1898] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier–Villars, 1898 ; 2e éd., Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions, publiées sous la direction de M. Émile Borel, *ibid.*, 1914 ; 3e éd., *ibid.*, 1928 ; réimpression Paris : Jacques Gabay, 1997.

[1906a] La valeur pratique du calcul des probabilités, *La Revue du mois*, 1 (1906), p. 424–437 ; *Œuvres* 2, p. 991–1004.

[1906b] Sur les principes de la théorie cinétique des gaz, *Ann. scient. École norm. sup.*, 3e s., 23 (1906), p. 9–32 ; *Œuvres* 3, p. 1669–1692.

[1907a] L'évolution de l'intelligence géométrique, *Revue de métaphysique et de morale*, 15 (1907), p. 747–754.

[1907b] Un paradoxe économique. Le sophisme du tas de blé et les vérités statistiques, *La Revue du mois*, 4 (1907), p. 688–699.

[1909a] Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 27 (1909), p. 247–271 ; reproduit en Note V dans [Borel 1898/1914] ; *Œuvres* 2, p. 1055–1079.

[1909b] *Éléments de la théorie des probabilités*, Paris : Hermann, 1909 ; 2e éd., 1910 ; 3e éd. revue et augmentée, *ibid.*, 1924. Édition revue et augmentée, Paris : Albin Michel, coll. Bibliothèque d'éducation par la science, 1950 ; trad. anglaise par J.E. Freund, Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1965.

[1911] Les probabilités et M. Le Dantec, *La Revue du mois*, 12 (1911), p. 77–91.

[1913] La mécanique statistique et l'irréversibilité, *Journal de Physique*, 3 (1913), p. 189– 196 ; *Œuvres* 3, p. 1697–1704.

[1914] *Le Hasard*, Paris : Alcan, 1914 ; dernière éd., *ibid.*, 1948.

[1919] Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives, *Ann. scient. École norm. sup.*, 36 (1919), p. 71–91 ; *Œuvres* 2, p. 879–899.

[1924] À propos d'un traité de probabilités, *Revue philosophique*, 98 (1924), p. 321–336 ; reproduit dans [Borel 1939], note II, p. 134–146.

[1929] Le calcul des probabilités et les sciences exactes, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3–10 septembre 1928*, 1 (1929), et *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1929), p. 115–123.

[1931] La crise économique et la science, *La Revue de Paris*, 15 avril 1931, p. 756–767.

[1932] La science est-elle responsable de la crise mondiale ?, *Scientia*, janvier 1932, p. 99–106.

[1938] *Applications aux jeux de hasard*, rédigé par Jean Ville, fasc. 2, t. 4 du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel, Paris : Gauthier-Villars, 1938 ; réimpression Paris : Jacques Gabay, 1991.

[1939] Valeur pratique et philosophie des probabilités, fasc. 3, t. 4 du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel, Paris : Gauthier-Villars, 1939 ; réimp. Paris : Jacques Gabay, 1991.

[1940] Une objection à la définition empirique de la probabilité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 211 (1940), p. 312–314.

[1941] *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, coll. L'Avenir de la Science 15, Paris : Gallimard, 1941 ; 11e éd., *ibid.*, 1950.

[1943] *Les probabilités et la vie*, coll. Que sais–je ? 91, Paris : PUF 1943 ; 5e éd., *ibid.*, 1961 ; 6e et dernière éd., *ibid.*, 1967.

[1946] *Les paradoxes de l'infini*, coll. L'Avenir de la Science 25, Paris : Gallimard, 1946.

[1947] Sur les probabilités dénombrables et le pari de Pascal, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 224 (1947), p. 77–78.

[1949a] *Éléments de la théorie des ensembles*, coll. Bibliothèque d'éducation par la science, Paris : Albin-Michel, 1949.

[1949b] Le paradoxe de Saint-Pétersbourg, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 (1949), p. 404– 405.

[1949c] Sur une propriété singulière de la limite d'une espérance mathématique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 (1949), p. 429–431.

[1949d] Sur une martingale mineure, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 (1949), p. 1181–1183.

[1950] *Probabilité et certitude*, coll. Que sais–je ? 445, Paris : PUF, 1950 ; 2e éd., *ibid.*, 1956.

[1952] *Les nombres inaccessibles, avec une note de M. Daniel Dugué*, Collection des monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1952.

[1953] *Les nombres premiers*, coll. Que sais–je ? 571, Paris : PUF, 1953.

[1958] Extraits d'un projet d'ouvrage, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 16 (1958), p. 1–5.

[2000] La *Revue du mois de Émile Borel* (1905–1926), recueil inédit établi par Stéphane Monfort, coll. Philosophia Scientiae, Paris : Kimé, à paraître.

Braun (Marta)

[1992] *Picturing time : the work of Émile-Jules Marey (1830–1904)*, Chicago : University of Chicago Press, 1992.

Buffon (Georges-Louis Leclerc de)

[1777] *Essai d'arithmétique morale*, Suppléments tome IV : Histoire naturelle, générale et particulière, p. 46–148, Paris, 1777.

Callens (Stéphane)

[1997] *Les maîtres de l'erreur*, Paris : PUF, 1997.

Chow (Y. S.), Robbins (Herbert)

[1961] On Sums of Independent Random Variables with Infinite Moments and "Fair" Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 47 (1961), p. 330–335.

Chung (Kai Lai)

[1998] Probability and Doob, *American Mathematical Monthly*, 105 (1998), p. 28–35.

Chung (Kai Lai), Feller (William)

[1949] Fluctuations in Coin Tossing, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 35 (1949), p. 605–608.

Condorcet (Nicolas Caritat de)

[1994] *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits (1767–1789)*, sous la dir. de P. Crépel, Paris : INED, 1994.

Conry (Yvette)

[1974] *L'introduction du darwinisme en France au XIX*e *siècle*, Paris : Vrin, 1974.

COOLIDGE (Julian L.)

[1925] *An Introduction to Mathematical Probability*, Oxford : Clarendon Press, 1925.

COUMET (Ernest)

[*à paraître*] "La prétendue théorie des probabilités" selon A. Comte : conceptions philosophiques radicalement fausses et applications chimériques, exposé au Séminaire d'histoire du calcul des probabilités et de la statistique, EHESS, 7 mai 1999 (à paraître).

COURNOT (Antoine Augustin)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes de A.A. Cournot*, sous la dir. d'André Robinet, 10 vol., Paris : Vrin, 1973–1984.

[1843] *Exposition de la théorie des chances*, Paris : Hachette, 1843 ; *Œuvres* I, 1984.

[1872] *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, Paris : Hachette, 1872 ; *Œuvres* IV, 1973.

[1875] *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*, Paris : Hachette, 1875 ; *Œuvres* V, 1979.

CRÉPEL (Pierre)

[1984a] Quelques matériaux pour l'histoire de la théorie des martingales (1920–1940), *Séminaire de probabilités*, Université de Rennes I, 1984.

[1984b] *Conversation avec Jean Ville*, Langon, polycopié chez l'auteur, 1984.

CZUBER (Emanuel)

[1889] *Zum Gesetz der grossen Zahlen*, Prague, 1889.

[1902/1903] *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversichung*, 2 vols, Leipzig : Teubner, 1902–1903 ; 2^{e} éd., *ibid.*, 1909–1910.

DARWIN (Charles)

[1859/1872] *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, London : Murray, 1859 ; 6^{e} éd., *ibid.*, 1872 ; 1^{e} trad. fr. par Clémence A. Royer sur la 3^{e} éd., *De l'origine des espèces ou des lois du progrès chez les êtres organisés*, Paris : Guillaumin, 1862, etc. ; trad. fr. sur la 6^{e} éd. par E. Barbier revue par D. Becquemont, présentation J.-M. Drouin, *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la préservation des races favorisées dans la lutte pour la vie*, Paris : Flammarion, 1992.

DELL'AGLIO (Luca)

[1995] Divergences in the History of Mathematics : Borel, Von Neumann and the Genesis of Game Theory, *Rivista di Storia della Scienza*, SII 3(2) (1995), p. 1–46.

DEDEBANT (Georges), MACHADO (E.A.M.)

[1963] *Probabilidades*, Buenos-Aires : Imprenta y casa editora Coni, 1963.

DELAGE (Yves), GOLDSMITH (M.)

[1909] *Les théories de l'évolution*, Paris : Flammarion, 1909.

DEVILLERS (Charles), CHALINE (Jean)

[1989] *La théorie de l'évolution. État de la question à la lumière des connaissances scientifiques actuelles*, Paris : Dunod, 1989.

DIACONIS (Persi), ZABELL (Sandy)

[1991] Closed Form Summation for Classical Distributions : Variations on a Thema of De Moivre, *Statistical Science*, 6 (1991), p. 284–302.

Doob (Joseph Leo)
[1934] Probability and Statistics, *Transaction of the American Mathematical Society*, 36 (1934), p. 759–775.
[1936] Note on Probability, *Annals of Mathematics*, 37 (1936), p. 363–367.
[1940] Regularity Properties of Certain Families of Chance Variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47 (1940), p. 455–486.
[1949] Application of the Theory of Martingales, *Actes du Colloque International Le Calcul des Probabilités et ses applications (Lyon, 28 juin–3 juillet 1948)*, Paris : CNRS, 1949, p. 23–27.
[1953] *Stochastic Processes*, New York : Wiley, 1953.
Droesbeke (Jean-Jacques), Tassi (Philippe)
[1990] *Histoire de la statistique*, coll. Que sais-je ? 2527, Paris : PUF, 1990.
Dubins (Lester), Savage (Leonard Jimmie)
[1965] *How to Gamble if You Must*, New York : McGraw-Hill, 1965.
Duclaux (Jacques)
[1959] *La science de l'incertitude*, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris : Flammarion, 1959.
Dutka (Jacques)
[1988] On the St. Petersburg Paradox, *Archive for History of Exact Sciences*, 39 (1988), p. 13–39.
Feller (William)
[1937] Über das Gesetz der grossen Zahlen, *Acta Litterarum Scientiarum Univ. Szeged*, 8 (1936–1937), p. 191–201.
[1945] Note on the Law of Large Numbers and "Fair" Games, *Annals of Mathematical Statistics*, 16 (1945), p. 301–304.
[1950/1968] *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, New York : Wiley, 1950 ; 3e éd., *ibid.*, 1968.
Fréchet (Maurice)
[1947] Buffon, philosophe des mathématiques, *Bulletin de l'Institut d'Égypte*, 28 (1945–1946), p. 185–202 ; repris dans la coll. Corpus général des philosophes français, *Œuvres philosophiques de Buffon*, Paris : PUF, 1954.
[1959] Le rôle d'Émile Borel dans la théorie des jeux, *Revue d'économie politique*, (1959), p. 139–167.
Gayon (Jean)
[1992] *Darwin et l'après-Darwin*, Paris : Kimé, 1992.
Giard (Alfred)
[1904] *Controverses transformistes*, Paris : Naud, 1904.
Guilbaud (Georges Théodule)
[1961] Faut-il jouer au plus fin ? (notes sur l'histoire de la théorie des jeux), *La Décision*, Colloque du CNRS, Paris, 25–30 mai 1959, Paris : CNRS, 1961, p. 171–182.
[1982/1997] Paroles et écrits sur divers sujets graves et légers, manuscrit EHESS.
Guiraldenq (Pierre)
[1999] *Émile Borel 1871–1956. L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles*, Saint-Affrique : Imprimerie du Progrès, 1999.
Hald (Anders)
[1990] *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, New York : Wiley, 1990.
[1998] *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, New York : Wiley, 1998.

ITARD (Jean)
[1969] *Les nombres premiers*, coll. Que sais-je ? 571, Paris : PUF, 1969.
JACOB (François)
[1970] *La logique du vivant. Une histoire de l'hérédité*, nrf, Paris : Gallimard, 1970.
JORLAND (Gérard)
[1987] The Saint Petersburg Paradox 1713–1937, in Krüger (Lorenz), Daston (Lorraine J.), Heidelberger (Michael), eds., *The Probabilistic Revolution*, vol. I, *Ideas in History*, Cambridge : MIT Press, 1987, p. 155–190.
KERRICH (John E.)
[1946] *An Experimental Introduction to the Theory of Probability*, Copenhagen : Einar Munksgaard, 1946.
KEYNES (John Maynard)
[1921] *A Treatise on Probability*, London : Macmillan, 1921.
KIMURA (Motoo)
[1983] *The Neutral Theory of Molecular Evolution*, Cambridge : Cambridge University Press, 1983 ; trad. fr. par Claudine Montgelard avec une préface de Jacques Ruffié, *Théorie neutraliste de l'évolution*, Nouvelle bibliothèque scientifique, Paris : Flammarion, 1990.
LABBÉ (Alphonse)
[1929] *Le conflit transformiste*, Nouvelle collection scientifique, Paris : Alcan, 1929.
LAMARCK (Jean-Baptiste-Pierre-Antoine de Monet de)
[1809] *Philosophie zoologique ou exposition des considérations relatives à l'histoire naturelle des animaux ; à la diversité de leur organisation et des facultés qu'ils en obtiennent ; aux causes physiques qui maintiennent en eux la vie et donnent lieu aux mouvements qu'ils exécutent ; enfin, à celles qui produisent, les unes le sentiment, et les autres l'intelligence de ceux qui en sont doués*, Paris : chez l'auteur, 1809 ; rééd. avec une présentation et des notes de A. Pichot, Paris : Flammarion, 1994.
LAPLACE (Pierre Simon)
[*Œuvres*] *Œuvres complètes de Laplace*, 14 vols., Paris : Gauthier–Villars, 1878–1912.
[1812–1820] *Théorie analytique des probabilités*, Paris : V^e^ Courcier, 1812 ; 3^e^ éd. revue et augmentée, *ibid.*, 1820 ; *Œuvres*, vol. VII.
[1814–1825] *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris : Bachelier, 1814–1825 ; rééd. Paris : Bourgois, 1986.
LASZLO (Pierre)
[1999] Émile Borel, vulgarisateur, à paraître dans les actes du *Colloque Émile Borel*, Saint-Affrique, 16–17 juillet 1999.
LEBESGUE (Henri)
[1991] Lettres à Émile Borel, éd. P. Dugac, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 12 (1991), p. 1-511.
LE DANTEC (Félix)
[1897] *Le déterminisme biologique et la personnalité consciente*, Paris : Alcan, 1897.
[1899] *Lamarckiens et Darwiniens, discussion de quelques théories sur la formation des espèces*, Paris : Alcan, 1899.
[1901] *Le Conflit. Entretiens philosophiques*, Paris : Albin Michel, 1901 ; 9^e^ éd., *ibid.*, 1926.
[1906] À propos de la conscience épiphénomène. Réponse à Jules Tannery, *Revue du mois*, 2 (1906), p. 476–488.

[1907a] La biologie de M. Bergson, *Revue du mois*, 4 (1907), p. 230–241.
[1907b] Le hasard et la question d'échelle, *Revue du mois*, 4 (1907), p. 257–288, reproduit dans [1907c].
[1907c] *De l'Homme à la Science*, Paris : Flammarion, 1907.
[1907d] *Éléments de philosophie biologique*, Paris : Alcan, 1907.
[1909] *La crise du transformisme*, Paris : Alcan, 1909 ; 2e éd., *ibid.*, 1910.
[1910] Les mathématiciens et la probabilité, *Revue philosophique*, 70 (1910), p. 329–360, reproduit dans [1911a].
[1911a] *Le chaos et l'harmonie universelle*, Paris : Alcan, 1911.
[1911b] *L'égoïsme, seule base des sociétés*, Paris : Flammarion, 1911.
[1913] *La "mécanique" de la vie*, Paris : Flammarion, 1913.
[1917a] *Le problème de la mort et la conscience universelle*, (1914 publié en 1917), Paris : Flammarion, 1917.
[1917b] *Savoir. Considérations sur la méthode scientifique, la guerre et la morale*, Paris : Flammarion, 1917.

Lenay (Charles)
[1989] *Enquête sur le hasard dans les théories biologiques de la deuxième moitié du XIXe siècle*, Thèse Université Paris 1, 1989.

Lenoir (Raymond)
[1919] La philosophie biologique de Le Dantec, *Revue philosophique*, 88 (1919), p. 386– 446.

Leray (Jean)
[2000] Jean Leray (1906–1998), *La Gazette des mathématiciens*, suppl. du no 84, Paris : SMF, 2000.

Lévy (Paul)
[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 6 vol., Paris : Gauthier-Villars.
[1934] Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 199 (1934), p. 627–629.
[1935] Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées, *Bulletin des sciences mathématiques*, (1935), p. 84–96 et 109–128.
[1936a] La loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées, *J. Math. Pures Appl.*, 15 (1936), p. 11–24.
[1936b] Sur quelques points de la théorie des probabilités dénombrables, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6 (1936), p. 153–184.
[1937] Théorie de l'addition des variables aléatoires, fasc. I de la Collection des monographies des probabilités, Paris : Gauthier-Villars, 1937.
[1939] Sur certains processus stochastiques homogènes, *Compositio mathematica*, 7 (1939), p. 283–? ? ?
[1940] Le mouvement brownien plan, *American Journal of Mathematics*, 62 (1940), p. 487–550.
[1970] *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paris : Blanchard, 1970.

Locker (Bernard)
[2000] *L'intégrale stochastique de Lévy*, Thèse Université Paris 5, 2000.

Lyon
[1949] *Actes du Colloque international "Le calcul des probabilités et ses applications", Lyon, 28 juin–3 juillet 1948*, Paris : CNRS, 1949.

Marbo (Camille, Marguerite Borel, dite)
[1968] *À travers deux siècles. Souvenirs et rencontres (1883–1967)*, Paris : Grasset, 1968.

MARITAIN (Jacques)
[1910a] La science moderne et la raison, *Revue de philosophie*, juin 1910 ; reproduit comme chap. 1 d'*Antimoderne*, Paris, 1923.
[1910b] Le néovitalisme en Allemagne et le darwinisme, *Revue de philosophie*, octobre 1910.
MARITAIN (Raïssa)
[1941] *Les grandes amitiés*, New York, 1941, Paris : Desclée de Brouwer, 1949.
MARTIN (Thierry)
[1996] *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, coll. Mathesis, Paris : Vrin, 1996.
MARTIN DU GARD (Roger)
[1913] *Jean Barois*, nrf, Paris, 1913 : Gallimard, 1921.
MARTIN-LÖF (A.)
[1985] A Limit Theorem which Clarifies the Petersburg Paradox, *Journal of Applied Probability*, 22 (1985), p. 635–643.
MENDÈS FRANCE (Michel), TENENBAUM (Gérard)
[1997] *Les nombres premiers*, coll. Que sais–je ? 571, Paris : PUF, 1997.
MISES (Richard von)
[*Works*] *Collected Works*, 2 vol., Providence : AMS, 1964.
[1919] Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Mathematische Zeitschrift*, 5 (1919), p. 52–99.
[1931] *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Leipzig und Wien : Deuticke, 1931.
MONOD (Jacques)
[1970] *Le hasard et la nécessité*, Paris : Le Seuil, 1970.
MONTMORT (Pierre Rémond de)
[1713] *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, seconde édition revue et augmentée de plusieurs lettres, Paris : Quillau, 1713 ; rééd. New York : Chelsea, 1980.
MORANGE (Michel)
[2000] Des lois de Mendel à la lecture du génome, *Pour la science*, 270 (avril 2000), p. 10–12.
MORGAN (Augustus de)
[1872] *A Budget of Paradoxes*, London : Longmans, Green, 1872.
MOREAU (J.)
[1917] *L'œuvre de Félix Le Dantec ; la méthode scientifique, les lois biologiques, les horizons philosophiques*, Paris : Larousse, 1917.
NEVEU (Jacques)
[1972] *Martingales à temps discret*, Paris : Masson, 1972.
PÉREZ (Charles)
[1917] *Félix Le Dantec*, Paris : Alcan, 1917.
PICHOT (André)
[1993] *Histoire de la notion de vie*, coll. TEL, Paris : Gallimard, 1993.
PLATO (Jan von)
[1994] *Creating Modern Probability : Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspectives*, New York : Cambridge University Press, 1994.
POINCARÉ (Henri)
[1907] Le hasard, *Revue du mois*, 3 (1907), p. 257–276 ; reproduit en introduction de [Poincaré 1912].

[1896] *Calcul des probabilités*, leçons professées pendant le second semestre 1893–1894, rédigées par A. Quiquet, ancien élève de l'École normale supérieure, Paris : Gauthier-Villars, 1896. Seconde édition revue et augmentée par l'auteur, Paris : Gauthier-Villars, 1912 ; nouveau tirage 1923 ; réimpression Paris : Jacques Gabay, 1987.

Poisson (Siméon Denis)

[1837] *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*, Paris : Bachelier, 1837.

Quetelet (Adolphe)

[1846] *Lettres à S.A.R. le Duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités, appliquées aux sciences morales et politiques*, Bruxelles : Hayez, 1846.

Reinach (Salomon)

[1926] *Lettres à Zoé*, t. 3, Paris : Hachette, 1926.

Richard-Foy (Émile)

[1910] L'existence et le fondement des lois du hasard, *Revue philosophique*, 69 (1910), p. 381–401.

Sageret (Jules)

[1924] *La révolution philosophique et la science. Bergson, Einstein, Le Dantec, J.-H. Rosny Aîné*, Nouvelle collection scientifique, Paris : Alcan, 1924.

Samuelson (Paul)

[1977] St. Petersburg Paradoxes : Defanged, Dissected, and Historically Described, *The Journal of Economic Literature*, 15 (1977), p. 24–55.

Schiller (Francis)

[1979] Paul Broca, London : University of California Press, 1979 ; trad. fr. par P. Monod-Broca, *Paul Broca explorateur du cerveau*, Paris : Odile Jacob, 1990.

Segal (Jérôme)

[1998] *La théorie de l'information et les mathématiques de l'ingénieur*, thèse Université de Lyon II, 1998.

Stigler (Stephen M.)

[1986] *The History of Statistics : The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge : Harvard University Press, 1986.

[1999] *Statistics on the Table. The History of Statistical Concepts and Methods*, Cambridge : Harvard University Press, 1999.

Tannery (Jules)

[1906] L'adaptation de la pensée. À Monsieur Félix Le Dantec, *Revue du mois*, 2 (1906), p. 129–147.

[1911] Pensées, *Revue du mois*, 11 (1911), p. 257–278, 399–435.

Todhunter (Isaac)

[1865] *A History of the Mathematical Theory of Probability*, London : Macmillan, 1865 ; rééd. New York : Chelsea 1949, 1965.

Valéry (Paul)

[1931] *Regards sur le monde actuel*, Paris : Stock, 1931.

Ville (Jean)

[1936a] Sur les suites indifférentes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 202 (1936), p. 1393–1395.

[1936b] Sur la notion de collectif, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 203 (1936), p. 26–27.

[1938a] Sur un jeu continu, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 206 (1938), p. 968–969.

[1938b] Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs, [Borel 1938], p. 105–117.

[1939] *Étude critique de la notion de collectif*, thèse sciences mathématiques Paris, fasc. III de la Collection de monographies des probabilités, Paris : Gauthier-Villars, 1939.

[1942] Sur un problème de géométrie suggéré par l'étude du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 215 (1942), p. 51–52.

[1948] Théorie et application de la notion de signal analytique, *Câbles et transmissions*, 2 (1948), p. 61–74.

[1949] Fonctions aléatoires et transmission de l'information, *Actes du Colloque International "Le calcul des probabilités et ses applications"*, Lyon, 28 juin–3 juillet 1948, Paris : CNRS, 1949, p. 115–119.

[1955] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jean Ville*, (polycopié, chez l'auteur), mai 1955.

Vries (Hugo de)

[1909] *Espèces et variétés : leur naissance par mutation*. Série de conférences données à Berkeley en 1904, traduites de l'anglais par L. Blaringhem, Paris : Alcan, 1909.

Weismann (August)

[1892] *Essais sur l'hérédité et la sélection naturelle*, trad. française par H. de Varigny, Paris : C. Reinwald, 1892.